Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 14 september 2012

Uitwerkingen

1. Om te laten zien dat het gegeven product

$$n = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

deelbaar is door 12, is het genoeg om te laten zien dat het deelbaar is door 3 en door 4. We kijken naar de rest bij deling door 3 van de getallen a, b, c en d. Omdat we vier getallen hebben en er slechts drie mogelijke resten bestaan, zijn er minstens twee getallen die dezelfde rest geven. Hun verschil is dan deelbaar door 3 en daarmee is ook n deelbaar door 3.

Als van de vier getallen a, b, c en d er drie (of zelfs vier) *even* zijn of als er drie *oneven* zijn, dan zijn de drie verschillen tussen die drie getallen *even*, zodat n zelfs deelbaar is door $2\times 2\times 2 = 8$.

Zo niet, dan zijn twee van de getallen *even* en twee van de getallen *oneven*. De twee onderlinge verschillen zijn *even*, zodat n deelbaar is door $2\times 2 = 4$. □

2. (a) Ja, het kan. Een mogelijke invulling van een 5×5-bord met in elke rij precies twee blauwe vakjes zie je hieronder.

1	2	3	4	5
5	4	3	2	1
1	5	4	3	2
2	1	5	4	3
3	2	1	5	4
4	3	2	1	5

(b) Bekijk een 10×10-bord dat volgens de regels is ingevuld. Elke kolom bevat dus de getallen 1 tot en met 10. In kolom 1 zijn 9 vakjes blauw (de vakjes met '2' tot en met '10'), in kolom 2 zijn 8 vakjes blauw (de vakjes met '3' tot en met '10'), in kolom 3 zijn 7 vakjes blauw (de vakjes met '4' tot en met '10') etc. In totaal zijn $9+8+7+\cdots+0 = 45$ vakjes blauw. Omdat 45 niet deelbaar is door 10, is het niet mogelijk dat elke rij evenveel blauwe vakjes heeft.

□

3. Alle termen die deelbaar zijn door p brengen we naar de linkerkant. Dit geeft $p^3 + mp - p = m^2 - 2m + 1$, oftewel

$$p(p^2 + m - 1) = (m-1)^2.$$

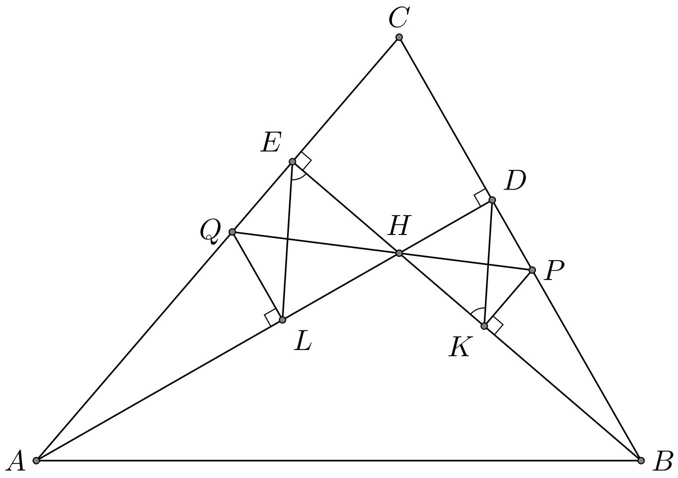
Merk op dat $m-1$ per aanname niet-negatief is. We zien dat p een deler is van $(m-1)^2$. Omdat p een priemgetal is, is p ook een deler van $m-1$. We schrijven $m-1 = kp$, waarbij k een niet-negatief geheel getal is. Invullen geeft: $p(p^2 + kp) = k^2p^2$. Als we aan beide kanten delen door p^2 vinden we $p + k = k^2$ oftewel

$$p = k(k-1).$$

Omdat p een priemgetal is, moet een van beide factoren k en $k-1$ gelijk zijn aan 1 (het geval $k-1 = -1$ is uitgesloten). Omdat $k = 1$ (en $k-1 = 0$) afvalt, blijft als enige mogelijkheid over dat $k-1 = 1$. We vinden dan $k = 2$, $p = 2$ en $m = 5$, zodat $(p,m) = (2,5)$ de enige mogelijke oplossing is. Het is duidelijk dat dit ook inderdaad een oplossing is. □

4. We gebruiken een aantal gelijkvormigheden. Merk op dat $\angle DHP = \angle LHQ$ (overstaande hoeken) en $\angle PDH = 90° = \angle QLH$. Er volgt dat driehoeken DHP en LHQ gelijkvormig zijn (hh). Uit deze gelijkvormigheid volgt dat $\frac{|DH|}{|LH|} = \frac{|HP|}{|HQ|}$. Op dezelfde manier zien we dat driehoeken KHP en EHQ gelijkvormig zijn, zodat $\frac{|KH|}{|EH|} = \frac{|HP|}{|HQ|}$.

Combineren van deze twee gelijkheden geeft $\frac{|DH|}{|LH|} = \frac{|KH|}{|EH|}$. Omdat geldt dat $\angle DHK = \angle LHE$ (overstaande hoeken), volgt hieruit dat driehoeken DHK en LHE gelijkvormig zijn (zhz). Uit deze gelijkvormigheid volgt dat $\angle HKD = \angle HEL$, zodat we vanwege Z-hoeken kunnen concluderen dat DK en EL evenwijdig zijn.



□

5. Een rijtje dat aan de gestelde eis voldoet noemen we 'goed'. We zullen het aantal goede rijtjes via een omweg bepalen door eerst iets anders te gaan tellen.

We kijken eerst naar de mogelijke manieren om de getallen 1 tot en met 12 te kleuren, elk met blauw of met rood. Omdat er voor elk van de 12 getallen twee mogelijkheden zijn: óf rood óf blauw, zijn er 2^{12} kleuringen. We noemen zo'n kleuring 'goed' als er minstens één rood en minstens één blauw getal is en het grootste rode getal groter is dan het kleinste blauwe getal. Er zijn precies 13 kleuringen die *niet* goed zijn, namelijk wanneer geen enkel getal rood is, of wanneer de rode getallen precies de getallen 1 tot en met k zijn voor zekere $k = 1, 2, \ldots, 12$ (als $k = 12$ zijn er geen blauwe getallen). In totaal zijn er dus $2^{12} - 13 = 4083$ goede kleuringen.

We laten nu zien dat het aantal goede rijtjes gelijk is aan het aantal goede kleuringen door ze één aan één te koppelen. Neem een goed rijtje en stel dat a het getal is dat kleiner is dan zijn voorganger in het rijtje. We kleuren nu de getallen die voor a staan met rood en we kleuren a en de getallen die na a staan blauw. Dit geeft een goede kleuring.

Nemen we bijvoorbeeld het goede rijtje $1, 3, 4, 5, 8, 9, 2, 6, 7, 10, 11, 12$, dan is a het getal 2. We kleuren dan 1, 3, 4, 5, 8 en 9 rood en kleuren 2, 6, 7, 10, 11 en 12 blauw. Dit is een goede kleuring, want $9 > 2$.

Iedere goede kleuring krijgen we op deze manier precies éénmaal. Neem namelijk maar een goede kleuring, dan vinden we het bijbehorende goede rijtje op de volgende manier terug: schrijf van klein naar groot alle rode getallen op, gevolgd door de blauwe getallen, van klein naar groot.

In totaal zijn er dus 4083 rijtjes die aan de eis voldoen. □