

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade



vrijdag 14 september 2012
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Hierbij telt niet alleen het (eind)antwoord; ook de manier van oplossen moet je duidelijk beschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel. Veel succes!

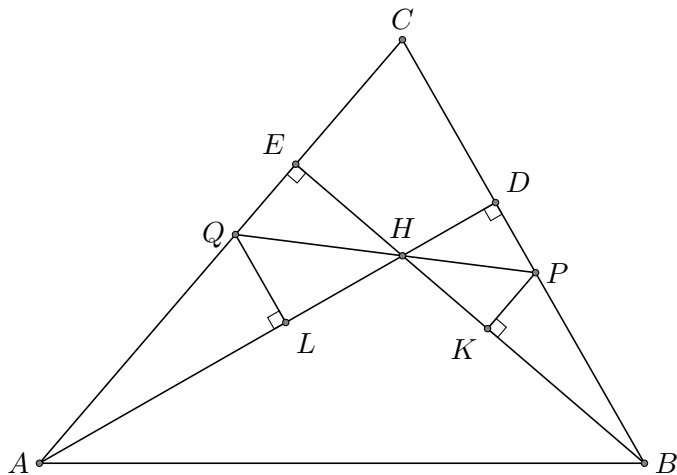
1. Gegeven zijn vier verschillende gehele getallen a , b , c en d .
Bewijs dat $(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$ deelbaar is door 12.
2. We nummeren de kolommen van een $n \times n$ -bord van 1 tot en met n . In elk vakje van het bord zetten we een getal, op zo'n manier dat in elke rij precies de getallen 1 tot en met n staan (de volgorde kan in elke rij anders zijn) en in elke kolom ook precies de getallen 1 tot en met n staan. We kleuren vervolgens een vakje blauw als het getal in dat vakje groter is dan het nummer van de kolom waar het vakje in zit. In de figuur zie je een voorbeeld voor $n = 3$.

	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

- (a) Stel dat $n = 5$. Kunnen we de getallen zo neerzetten dat in elke rij precies evenveel vakjes blauw gekleurd worden?
 - (b) Stel dat $n = 10$. Kunnen we de getallen zo neerzetten dat in elke rij precies evenveel vakjes blauw gekleurd worden?
3. Bepaal alle paren (p, m) bestaande uit een priemgetal p en een positief geheel getal m waarvoor geldt dat

$$p^3 + m(p + 2) = m^2 + p + 1.$$

4. Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC met punten D op BC en E op AC zodanig dat AD loodrecht staat op BC en BE loodrecht staat op AC . Het snijpunt van AD en BE heet H . Een lijn door H snijdt lijnstuk BC in P en snijdt lijnstuk AC in Q . Verder is K een punt op BE zodanig dat PK loodrecht staat op BE en is L een punt op AD zodanig dat QL loodrecht staat op AD .



Bewijs dat DK evenwijdig is aan EL .

5. De getallen 1 tot en met 12 worden in een rijtje achter elkaar gezet. Het aantal manieren waarop dit kan is $12 \times 11 \times 10 \times \dots \times 1$. We eisen dat er in zo'n rijtje precies één getal staat dat kleiner is dan het getal dat er direct aan voorafgaat. Hoeveel van de $12 \times 11 \times 10 \times \dots \times 1$ rijtjes voldoen aan deze eis?