Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 16 september 2011

Uitwerkingen

1. Omdat a en b dezelfde rol spelen in de vergelijking $a! + b! = 2^n$, nemen we voor het gemak aan dat $a \leqslant b$. De oplossingen met $a > b$ vinden we dan door a en b te verwisselen. We bekijken de mogelijkheden voor a.

Geval $a \geqslant 3$: Omdat $3 \leqslant a \leqslant b$, zijn $a!$ en $b!$ deelbaar door 3, zodat ook $a! + b!$ deelbaar is door 3. Omdat 2^n voor geen enkele waarde van n deelbaar is door 3, zijn er geen oplossingen.

Geval $a = 1$: Voor b moet gelden dat $b! = 2^n - 1$. Omdat 2^n *even* is (want $n \geqslant 1$), moet $b!$ *oneven* zijn. Omdat $b!$ deelbaar is door 2 voor alle $b \geqslant 2$, blijft alleen $b = 1$ over. We vinden $1! = 2^n - 1$, zodat $n = 1$. De enige oplossing is dus $(a, b, n) = (1, 1, 1)$.

Geval $a = 2$: Voor $b \geqslant 4$ zijn er geen oplossingen. Immers, omdat $b!$ dan deelbaar is door 4, mag $2^n = b! + 2$ *geen* viervoud zijn, zodat $2^n = 2$ de enige mogelijkheid is. Maar dit is in strijd met het feit dat $2^n = b! + 2 \geqslant 24 + 2$.

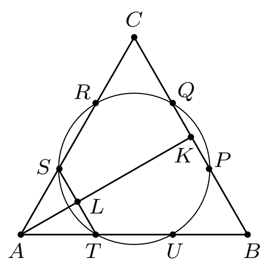
Voor $b = 2$ vinden we $2^n = 2+2 = 4$. Dus $n = 2$ en $(a, b, n) = (2, 2, 2)$ is de enige oplossing.

Voor $b = 3$ vinden we $2^n = 2+6 = 8$. Dus $n = 3$ en $(a, b, n) = (2, 3, 3)$ is de enige oplossing.

Door a en b van rol te wisselen, vinden we ook de oplossing $(a, b, n) = (3, 2, 3)$.

In totaal zijn er dus vier oplossingen: $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$ en $(3, 2, 3)$. $\square$

2. Het midden van PQ noemen we K. Dan is K ook het midden van BC en is AK een zwaartelijn in driehoek ABC. Het snijpunt van AK met ST geven we aan met L.



Driehoeken AST en driehoek ACB zijn gelijkvormig (zhz), want $\angle CAB = \angle SAT$ en $\frac{|CA|}{|SA|} = 3 = \frac{|BA|}{|TA|}$. Hieruit volgt dat ST evenwijdig is aan CB (F-hoeken).

Driehoeken ASL en ACK zijn ook gelijkvormig (hh), want $\angle SAL = \angle CAK$ en $\angle LSA = \angle TSA = \angle BCA = \angle KCA$. Er geldt dus dat $\frac{|CK|}{|SL|} = \frac{|CA|}{|SA|} = 3$. Hieruit volgt dat L het midden is van ST, want $\frac{|SL|}{|ST|} = \frac{3 \cdot |SL|}{3 \cdot |ST|} = \frac{|CK|}{|CB|} = \frac{1}{2}$.

Het middelpunt M van de cirkel door P, Q, R, S, T en U ligt op de middelloodlijnen van PQ en ST. Omdat PQ evenwijdig is aan ST, zijn deze twee middelloodlijnen evenwijdig en moeten dus samenvallen (want ze hebben punt M gemeen). Deze lijn gaat door L en K en is dus gelijk aan lijn AK, zodat $AK \perp BC$.

Er volgt dat $|AC| = |AB|$, want AK is de middelloodlijn van lijnstuk BC.

Op dezelfde manier is te bewijzen dat $|AC| = |BC|$, zodat bewezen is dat driehoek ABC gelijkzijdig is. $\square$

3. In totaal worden er 15 wedstrijden gespeeld. Per wedstrijd worden in totaal 2 of 3 punten verdiend. De som van de zes scores ligt daarom tussen de $15 \cdot 2 = 30$ (alle wedstrijden gelijkspel) en $15 \cdot 3 = 45$ (geen wedstrijd gelijkspel).

De som van de zes scores is ook gelijk aan $a + (a+1) + \cdots + (a+5) = 15 + 6a$. We zien dat $30 \leqslant 15 + 6a \leqslant 45$, dus $3 \leqslant a \leqslant 5$. We bewijzen dat alleen $a = 4$ mogelijk is.

Bekijk eerst het geval $a = 5$. Het totaal aantal punten is dan $15+30 = 45$, dus geen wedstrijd is in gelijkspel geëindigd. In elke wedstrijd verdient een team dan 0 of 3 punten, zodat alle scores deelbaar zijn door 3. De scores kunnen dus geen zes opeenvolgende getallen zijn.

Bekijk nu het geval $a = 3$. De som van de scores is $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$. De teams met 6 en 7 punten hebben elk minstens één van hun vijf wedstrijden gewonnen.

Het team met 8 punten heeft zelfs minstens tweemaal gewonnen, want $3+1+1+1+1 = 7 < 8$. Er zijn dus minstens 4 wedstrijden niet in gelijkspel geëindigd, zodat de som van de scores minstens $4 \cdot 3 + 11 \cdot 2 = 34$ is. Maar we zagen al dat deze som gelijk is aan 33. Het geval $a = 3$ kan dus niet voorkomen.

Tenslotte laten we zien dat $a = 4$ wel mogelijk is: in de tabel zie je een van de mogelijke spelverlopen waarbij teams A t/m F scores 4 t/m 9 hebben. In de laatste kolom staat de scores van de zes teams. □

	A	B	C	D	E	F	
A	-	3	1	0	0	0	4
B	0	-	1	0	3	1	5
C	1	1	-	3	0	1	6
D	3	3	0	-	1	0	7
E	3	0	3	1	-	1	8
F	3	1	1	3	1	-	9

4. Schrijf voor het gemak $y = \sqrt{a}$ en $z = \sqrt{b}$. De vergelijkingen worden dan

$$y^3 + z^3 = 134 \qquad \text{en} \qquad y^2z + yz^2 = 126.$$

Door deze twee vergelijkingen handig te combineren, zien we dat

$$(y + z)^3 = (y^3 + z^3) + 3(y^2z + yz^2) = 134 + 3 \cdot 126 = 512 = 8^3.$$

Hieruit volgt direct dat $y + z = 8$.

We herschrijven de eerste vergelijking als volgt: $(y+z)yz = y^2z+yz^2 = 126$. Omdat $y+z = 8$, zien we dat $yz = \frac{126}{8} = \frac{63}{4}$.

Uit $y + z = 8$ en $yz = \frac{63}{4}$ kunnen we y en z bepalen door een kwadratische vergelijking op te lossen: y en z zijn precies de oplossingen van de vergelijking $x^2 - 8x + \frac{63}{4} = 0$. De twee oplossingen zijn $\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot\frac{63}{4}}}{2}$, oftewel $\frac{9}{2}$ en $\frac{7}{2}$.

Omdat $a > b$, geldt ook dat $y > z$, dus $y = \frac{9}{2}$ en $z = \frac{7}{2}$. We vinden dus dat $(a, b) = (\frac{81}{4}, \frac{49}{4})$.

Omdat $(a, b) = (\frac{81}{4}, \frac{49}{4})$ inderdaad aan de gegeven vergelijkingen voldoet, concluderen we dat dit de (enige) oplossing is. □

5. Gegeven is dat 1 wit is. Het getal 0 is zwart, want als 0 wit was, zouden $1 = 1 - 0$ en $1 = 1 + 0$ verschillende kleuren hebben. Het getal 2 is wit, omdat $0 = 1 - 1$ (zwart) en $2 = 1 + 1$ verschillende kleuren hebben.

We bewijzen met inductie dat voor iedere $k \geqslant 0$ geldt:

$$3k \text{ is zwart, } 3k + 1 \text{ en } 3k + 2 \text{ zijn wit.}$$

Voor $k = 0$ hebben we dit zojuist bewezen. Stel nu dat de bewering waar is voor $k = \ell$.

Omdat 1 wit is en $3\ell + 2$ wit is wegens de inductiehypothese, zijn $(3\ell + 2) - 1 = 3\ell + 1$ en $(3\ell+2)+1 = 3(\ell+1)$ verschillend gekleurd. Aangezien $3\ell+1$ wit is wegens de inductiehypothese, moet $3(\ell + 1)$ zwart zijn.

Omdat 2 en $3\ell + 2$ wit zijn, moeten $(3\ell + 2) + 2 = 3(\ell + 1) + 1$ en $(3\ell + 2) - 2 = 3\ell$ verschillend gekleurd zijn. Omdat 3ℓ zwart is wegens de inductiehypothese, geldt dat $3(\ell + 1) + 1$ wit is.

Omdat $3(\ell + 1) + 1$ en 1 wit zijn, moeten $3(\ell + 1) + 1 + 1 = 3(\ell + 1) + 2$ en $3(\ell + 1)$ verschillend gekleurd zijn. We weten al dat $3(\ell + 1)$ zwart is, dus $3(\ell + 1) + 2$ is wit.

Hiermee is de stelling bewezen voor $k = \ell + 1$.

Aangezien $2011 = 3 \cdot 670 + 1$ is dit ook direct een bewijs voor het feit dat 2011 wit is. □