Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 18 september 2009
Technische Universiteit Eindhoven

Uitwerkingen

1. Merk op dat de twee getallen die bij de tweede voorwaarde worden genoemd, niet op een 0 mogen eindigen; dan zou immers het product ook op een 0 eindigen. De twee getallen hebben dus evenveel cijfers. Maar het product van twee getallen bestaande uit vier of meer cijfers is te groot (dat bestaat uit minstens zeven cijfers) en het product van twee getallen bestaande uit twee of minder cijfers is te klein (dat bestaat uit hoogstens vier cijfers).

a	b	c	$\overline{abc} \cdot \overline{cba}$
1	0	1	10201
1	0	2	20502
2	0	1	idem
2	0	2	40804
1	1	1	12321
1	1	2	23632
2	1	1	idem
2	1	2	44944
1	2	1	14641
1	2	2	26962
2	2	1	idem

Voor de tweede voorwaarde moeten we dus kijken naar producten van getallen bestaande uit drie cijfers, zeg $\overline{abc}$ en $\overline{cba}$. Als we dit uitwerken krijgen we: $\overline{abc} \cdot \overline{cba} = (100a + 10b + c)(100c + 10b + a) = 10000ac + 1000b(a + c) + 100(a^2 + b^2 + c^2) + 10b(a + c) + ac$. Als $ac > 9$, dan bestaat dit getal uit meer dan 5 cijfers. Dus $ac \leqslant 9$. Stel $b(a + c) > 9$, dan is het eerste cijfer meer dan ac en niet meer gelijk aan het laatste cijfer. Dus $b(a + c) \leqslant 9$. Een zelfde argument geldt dan voor $a^2 + b^2 + c^2$. Dus we weten dat $1 + b^2 + 1 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9$ dus $b = 0$, $b = 1$ of $b = 2$.
Voor $b = 0$ moet $a^2 + c^2 \leqslant 9$, dus (wegens $a, c \geqslant 1$) $1 \leqslant a \leqslant 2$ en idem voor c.
Voor $b = 1$ gaan de voorwaarden over in $a + c \leqslant 9$ en $a^2 + c^2 \leqslant 8$, terwijl ook $1 \leqslant ac \leqslant 9$. De tweede voorwaarde geeft $1 \leqslant a \leqslant 2$ en idem voor c.
Voor $b = 2$ gaan de voorwaarden over in $a + c \leqslant 4$ en $a^2 + c^2 \leqslant 5$. Dus drie mogelijkheden voor (a, b).
In bovenstaande tabel gaan we nu alle mogelijkheden langs. Het blijkt dat er in totaal acht verschillende palindroomproducten zijn: 10201, 12321, 14641, 20502, 23632, 26962, 40804 en 44944. □

2. Voor $n \geqslant 1$ vinden we dat $a_{2n} = a_{2n-1} + n = a_{2n-2} + 2n$, dus $a_{2n} = 0 + 2 + 4 + \cdots + 2n = 2(0+1+2+\cdots+n) = n(n+1)$. Nu geldt (wegens $n > 0$) dat $n^2 < n^2+n < n^2+2n+1 = (n+1)^2$, dus $a_{2n} = n(n + 1)$ kan nooit een kwadraat zijn; het zit precies tussen twee opeenvolgende kwadraten in. De even $k \geqslant 2$ voldoen dus niet. Uit $a_{2n-1} = a_{2n} - n = n(n + 1) - n = n^2$ volgt dat a_{2n-1} juist wel altijd een kwadraat is, dus alle oneven k voldoen juist wel. Ten slotte is $a_0 = 0$ ook een kwadraat. We concluderen dat alle oneven k en $k = 0$ voldoen, en alle overige k juist niet. □

3. We bewijzen eerst dat er een cykel is, dat wil zeggen m verschillende deelnemers $A_1, \dots, A_m$ zodat A_1 won van A_2, A_2 van A_3, etc., tot en met A_m die weer won van A_1. Begin maar met een willekeurige speler B_1. Die heeft gewonnen van een andere speler B_2, die op zijn beurt weer gewonnen heeft van een zekere B_3. Zo kunnen we alsmaar door gaan. Omdat we maar eindig veel spelers hebben, zal op een gegeven moment een herhaling optreden: B_1 won van B_2, B_2 van B_3, …, B_u van B_{u+1} maar B_{u+1} is een speler die al eerder in de rij voorkwam, zeg $B_{u+1} = B_t$. Nu vormen B_t tot en met B_u inderdaad een cykel. Merk op dat de lengte m van een cykel altijd ten minste 3 is. In feite moeten we nu bewijzen dat er ook een cykel van lengte 3 is.
Omdat er in ieder geval een cykel is, kunnen we er ook een kiezen met kortst mogelijke lengte M, zeg $C_1, \dots, C_M$. Als $M > 3$, dan kijken we naar de onderlinge wedstrijd van C_1 en C_3. Zou C_3 gewonnen hebben van C_1; dan hebben we een cykel van lengte 3 gevonden en dat is kleiner dan M; tegenspraak. Zou C_1 juist gewonnen hebben van C_3, dan hebben we een cykel van lengte $M - 1$ (door weglating van C_2), wat ook een kortere cykel is; ook dit geeft dus een tegenspraak. We concluderen dat $M = 3$ en C_1, C_2, C_3 vormt de gezochte cykel van lengte 3. □

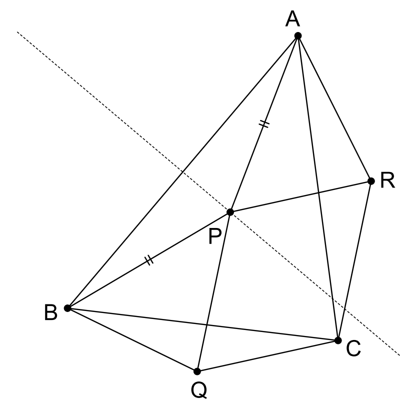
Alternatieve oplossing: Kies een deelnemer A met de minste gewonnen wedstrijden en een deelnemer B waarvan A gewonnen heeft. Bekijk de verzameling X van deelnemers waarvan B gewonnen heeft. A zit niet in die verzameling X. Als er niet zo'n drietal is als gevraagd, dan heeft A van alle mensen in X gewonnen. Maar A had ook al van B gewonnen. Dus dan heeft A van minstens één persoon meer gewonnen dan B, tegenspraak. □

Nog een alternatieve oplossing: Noem het aantal spelers n. We gaan het probleem oplossen met inductie naar n. We bekijken eerst het geval $n = 3$. Omdat elk van de drie spelers minstens één wedstrijd heeft gewonnen, maar ze in totaal maar drie wedstrijden hebben gespeeld, heeft iedereen precies één wedstrijd gewonnen. In dit geval is het duidelijk dat de drie spelers een drietal vormen waarbij A won van B, B van C en C van A. Stel nu dat de bewering geldt voor willekeurige toernooien met $n = k$ spelers (waarin altijd elke speler minstens één wedstrijd wint) voor zekere $k \geqslant 3$. We bekijken nu het geval $n = k + 1$. Als er een speler is (zeg A) die precies één wedstrijd heeft gewonnen, dan is het duidelijk dat er zo'n drietal is. Noem namelijk B degene van wie A heeft gewonnen, dan heeft B op zijn beurt heeft weer van minstens één iemand anders gewonnen, zeg van (o.a.) C. Nu moet C wel van A gewonnen hebben, want A had niet van C gewonnen; hij had immers alleen van B gewonnen. Dus nu hebben we zo'n drietal. Als er niet iemand is die precies één wedstrijd heeft gewonnen, heeft iedereen er minstens twee gewonnen. Stuur nu één willekeurige deelnemer weg en doe net of die niet aan het toernooi heeft meegedaan. Daardoor gaat bij alle andere deelnemers het aantal gewonnen wedstrijden met 0 of 1 omlaag (afhankelijk van of ze van deze weggestuurde speler hadden verloren of gewonnen). Nog steeds heeft iedereen dus minstens één wedstrijd gewonnen en volgens de inductiehypothese vinden we nu in het toernooi met de overgebleven k personen een drietal als gevraagd. □

4. Merk op dat $|AP| = |PB|$ en dus ook $|BQ| = |QC|$ en $|CR| = |RA|$. Omdat $\triangle BPA \sim \triangle BQC$, geldt $\frac{|PB|}{|AB|} = \frac{|QB|}{|CB|}$ en dus $\frac{|PB|}{|QB|} = \frac{|AB|}{|CB|}$. Verder geldt, omdat Q buiten en P binnen driehoek ABC ligt, dat

$$\angle QBP = \angle QBC + \angle CBP = \angle PBA + \angle CBP = \angle CBA,$$

waaruit nu volgt dat $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$ (zhz). Hierbij is $\triangle ABC$ een factor $\frac{|AB|}{|PB|}$ groter dan $\triangle PBQ$. Analoog is $\triangle ABC \sim \triangle APR$, waarbij $\triangle ABC$ een factor $\frac{|AB|}{|PA|}$ groter is dan $\triangle APR$. Omdat $|PA| = |PB|$ en dus $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|AB|}{|PB|}$, kunnen we nu concluderen dat $\triangle PBQ \cong \triangle APR$. Dus $|QP| = |RA| = |CR|$ en $|PR| = |BQ| = |QC|$.
De twee paren overstaande zijden van vierhoek $PQCR$ hebben dus gelijke lengte, waaruit volgt dat vierhoek $PQCR$ een parallellogram is. $\square$



5. We bekijken het eerst per twee stappen. Als bij aanvang van stap $2k-1$ de stapel kaarten van boven naar onderen bestaat uit de getallen $a_1, \ldots, a_{100}$, worden eerst de eerste $2k-1$ kaarten in volgorde omgedraaid, dus krijgen we $a_{2k-1}, a_{2k-2} \ldots, a_2, a_1, a_{2k}, a_{2k+1} \ldots, a_{100}$ en vervolgens worden de eerste $2k$ kaarten in volgorde omgedraaid, wat $a_{2k}, a_1, a_2, \ldots, a_{2k-2}, a_{2k-1}, a_{2k+1}, \ldots, a_{100}$ geeft. Netto is nu de $2k$-de kaart bovenaan gezet en de rest doorgeschoven. Doen we dit vanuit de beginsituatie, dan wordt dus eerst 2 bovenaan gezet, dan 4 daar weer boven, dan 6, etc., dus na $50 \times 2 = 100$ stappen krijgen we $100, 98, 96, \ldots, 4, 2, 1, 3, 5, \ldots, 97, 99$. Zie dit nu als een megastap en bekijk alleen nog maar megastappen. In het algemeen gaat bij een megastap de volgorde $a_1, a_2, \ldots, a_{99}, a_{100}$ over in $a_{100}, a_{98}, a_{96}, \ldots, a_4, a_2, a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{97}, a_{99}$. Merk op dat dit een omkeerbare stap is: de volgorde na een megastap kan maar van één unieke volgorde afkomstig zijn. Nu zijn er maar eindig (namelijk 100!) manieren om de getallen $1, \ldots, 100$ op een rij te zetten, dus als we alsmaar megastappen doen, zullen we na zeker moment en volgorde van de kaarten terugkrijgen die we al gehad hadden. Bekijk de eerste megastap die een reeds bekende situatie oplevert. Zou dit niet de beginsituatie zijn, dan zou een megastap terug ook al een reeds bekende situatie moeten hebben opgetreden; tegenspraak. Dus we komen weer terug in de beginsituatie. $\square$

Alternatieve oplossing: We bekijken weer een megastap. Het getal dat op plek 1 staat, gaat naar plek 51; dat op plek 51 juist naar plek 76, etc. Dit levert een zogenaamde cykel die we noteren als $1 \to 51 \to 76 \to 13 \to \cdots \to 1$. We lezen uit deze notatie af dat het getal op plek 1 na twee megastappen op plek 76 staat. Als het getal op plek 1 na k megastappen weer op plek 1 staat, noemen we de lengte van de cykel k. Het is duidelijk dat het getal dat op plek 51 staat, dan ook na k stappen weer op zijn plek staat. Zo kunnen we het gedrag van de kaarten omschrijven met een aantal cykels. Neem nu een gemeen veelvoud van alle lengtes van de cykels; na zoveel stappen moeten alle getallen weer op hun plek terecht zijn gekomen. $\square$