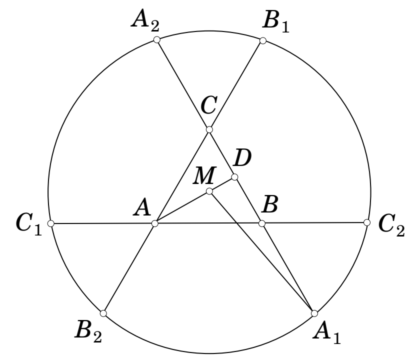
Oplossingen 2e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2007.

Opgave 1:

Zij M het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ en D het midden van BC. Trek AD door M en MA_1. AD is zwaartelijn dus $|MD| = \frac{1}{3}|AD| = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ en $|BD| = \frac{1}{2}$. Met de stelling van Pythagoras voor $\triangle MDA_1$ vinden we $|MA_1|^2 = |MD|^2 + |DA_1|^2 = (\frac{1}{6}\sqrt{3})^2 + (\frac{3}{2})^2 = \frac{7}{3}$. Dus $|MA_1| = \frac{1}{3}\sqrt{21}$. (Op eenzelfde manier kun je de afstand van M naar de andere vijf punten berekenen: dat geeft telkens $\frac{1}{3}\sqrt{21}$.) De straal van de cirkel die door de punten A_1, B_2, C_1, A_2, B_1 en C_2 gaat is dus $\frac{1}{3}\sqrt{21}$.



Opgave 2:

Stel dat er zo'n verdeling in elf deelverzamelingen bestaat. Dan geldt voor elk van die elf deelverzamelingen van drie getallen $a + b = c$, als a, b en c de getallen van de deelverzameling zijn. Dus geldt $a + b + c = 2c$. Dus voor elke deelverzameling is de som van de getallen even. Dus moet de som van alle getallen $1, 2, \ldots, 32, 33$ ook even zijn.
Maar $1 + 2 + 3 + \cdots + 33 = \frac{1}{2} \times 33 \times (33 + 1) = 33 \times 17$ en dat is een oneven getal. Tegenspraak. Dus er bestaat geen verdeling van A met de gewenste eigenschappen.

Opgave 3:

Veronderstel dat er zo'n getal $\underbrace{444\cdots4443}_{k}$ bestaat dat deelbaar is door 13, dan is ook dat getal -13 deelbaar door 13. Dus $444\cdots4430$ is dan deelbaar door 13. Omdat $444\cdots4430 = 444\cdots443 \times 10$ en 10 niet deelbaar is door het priemgetal 13 moet dan ook $\underbrace{444\cdots443}_{k-1}$, het getal met één 4 minder, deelbaar zijn door 13. Deze redenering kunnen we blijven toepassen tot we 43 over hebben, dat dan dus ook deelbaar moet zijn door 13. Maar 43 is niet deelbaar door 13, dus is het originele getal ook niet deelbaar door 13. Er bestaat dus geen enkel getal van die vorm dat deelbaar is door 13.
(Als het aantal vieren gelijk is aan 0 dan staat er het getal 3 en 3 is natuurlijk ook niet deelbaar door 13.)

Opgave 4:
In de ontbinding van het kwadraat van een geheel getal komt elke priemfactor een even aantal keren voor. En omgekeerd: als in de ontbinding van een geheel getal elke priemfactor een even aantal keren voorkomt, is het getal het kwadraat van een geheel getal.
We onderscheiden twee gevallen: a even en a oneven.

- Veronderstel a is even, dan $a = 2c$ en $a^a = (2c)^{2c} = (2^c c^c)^2$. In dit geval is a^a dus altijd het kwadraat van een geheel getal.

- Veronderstel a is oneven, dan $a = 2c + 1$ en

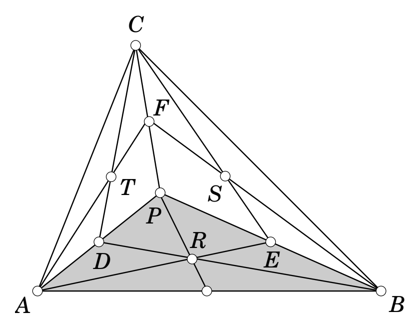
$$a^a = (2c+1)^{2c+1} = (2c+1)^{2c}(2c+1) = \left((2c+1)^c\right)^2(2c+1).$$

  $\left((2c+1)^c\right)^2$ is een kwadraat dus a^a is het kwadraat van een geheel getal precies dan als elke priemfacor van $(2c+1)$ een even aantal keren voorkomt, dus precies dan als $(2c+1)$ zelf het kwadraat van een geheel getal is.

Conclusie: we vinden alle even getallen en alle oneven kwadraten ≤ 100 en dat zijn er $50 + 5 = 55$.

Opgave 5:

De oppervlakte van $\triangle ABC$ noteren we als $[ABC]$. Zo ook de oppervlakte van een vierhoek $ABCD$ als $[ABCD]$.



We bekijken eerst $\triangle ABP$. De lijnstukken AE en BD zijn twee zwaartelijnen in deze driehoek, dus R is het zwaartepunt van de driehoek en als we de derde zwaartelijn vanuit P door R erbij tekenen, dan wordt de driehoek verdeeld in zes even grote driehoekjes. Dus geldt $[DREP] = \frac{2}{6}[ABP]$.

Voor $\triangle BCP$ vinden we op eenzelfde manier $[ESFP] = \frac{1}{3}[BCP]$ en voor $\triangle CAP$ weer $[FTDP] = \frac{1}{3}[CAP]$, zodat

$$[DRESFT] = \tfrac{1}{3}([ABP] + [BCP] + [CAP]) = \tfrac{1}{3}[ABC]$$

en dat is onafhankelijk van de positie van P.