



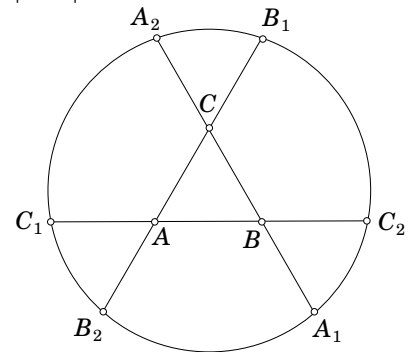
Nederlandse Wiskunde Olympiade
tweede ronde
vrijdag 14 september 2007
beschikbare tijd: 3 uur

- Bij elke opgave is niet alleen het antwoord van belang; ook de manier van oplossen moet je duidelijk beschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer en een liniaal of geodriehoek. En natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel.
- Veel succes!

1. Bekijk de gelijkzijdige driehoek ABC met $|BC| = |CA| = |AB| = 1$.

Op het verlengde van zijde BC kiezen we punten A_1 (aan de kant van B) en A_2 (aan de kant van C) zodat $|A_1B| = |BC| = |CA_2| = 1$. Analoog kiezen we B_1 en B_2 op het verlengde van zijde CA zodat $|B_1C| = |CA| = |AB_2| = 1$, en C_1 en C_2 op het verlengde van zijde AB zodat $|C_1A| = |AB| = |BC_2| = 1$.

Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ is ook het middelpunt van de cirkel door A_1, B_2, C_1, A_2, B_1 en C_2 .



Bereken de straal van de cirkel door A_1, B_2, C_1, A_2, B_1 en C_2 .

2. Is het mogelijk om de verzameling $A = \{1, 2, 3, \dots, 32, 33\}$ op te delen in elf deelverzamelingen met elk drie getallen waarbij voor elk van de elf deelverzamelingen geldt dat één van de drie getallen gelijk is aan de som van de andere twee getallen? Zo ja, geef dan zo'n verdeling in drietallen; zo nee, bewijs dan dat het niet mogelijk is.
3. Bestaat er een getal van de vorm $444 \dots 4443$ (allemaal 4'en en op het eind een 3) dat deelbaar is door 13? Zo ja, geef dan een getal van die vorm dat deelbaar is door 13; zo nee, bewijs dan dat er niet zo'n getal is.
4. Bepaal het aantal gehele getallen a met $1 \leq a \leq 100$ zodanig dat a^a het kwadraat van een geheel getal is. (Beredeneer dat je ze allemaal hebt geteld.)
5. Gegeven zijn een driehoek ABC en een punt P binnen de driehoek.

Definieer D, E en F als de middens van respectievelijk AP, BP en CP . Noem verder R het snijpunt van AE en BD , noem S het snijpunt van BF en CE , en noem T het snijpunt van CD en AF .

Bewijs dat de oppervlakte van zeshoek $DRESFT$ niet afhangt van de positie van het punt P binnen de driehoek.

