Uitwerkingen 2^{e} ronde 2003

1. Voor een Pythagoreïsche driehoek met rechthoekszijden a en b en hypotenusa c geldt: $a^2 + b^2 = c^2$. De oppervlakte is gelijk aan $\frac{1}{2}ab$ en de omtrek is gelijk aan $a+b+c$.

   Dus $\frac{1}{2}ab = 2(a+b+c)$ ofwel $\dfrac{ab}{4} = a+b+c$ dus $\dfrac{ab}{4} - a - b = c$

   $a^2 + b^2 = (\dfrac{ab}{4} - a - b)^2$, $\quad 0 = (\dfrac{ab}{4})^2 - \dfrac{a^2 b}{2} - \dfrac{ab^2}{2} + 2ab$, $\quad ab - 8a - 8b + 32 = 0$.

   De laatste uitdrukking kunnen we als volgt herschrijven $ab - 8a - 8b + 64 = 32$ dus $(a-8)(b-8) = 32$. Omdat 32 op drie manieren te ontbinden is $1 \times 32, 2 \times 16, 4 \times 8$ vinden we tenslotte drie oplossingen voor a en b waarbij de bijbehorende c snel te bepalen is: (9,40,41) , (10,24,26) en (12,16,20) .

2. Het gemeenschappelijke stuk heeft vanwege de symmetrie de vorm van een vlieger. De vlieger bestaat uit twee congruente (gelijke) driehoeken die elk een 30-60-90-driehoek zijn. De verhouding van de lengtes van de zijden is $1 : \sqrt{3} : 2$. De kleinste rechthoekszijde heeft dus een lengte van $12/\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$. De oppervlakte van het gemeenschappelijke stuk is gelijk aan twee maal de oppervlakte van een driehoek dus $12 \times 4\sqrt{3}$.

3. De getallen $b, b+1, b+2, b+3$ liggen dicht bij elkaar. De getallen $b(b+3)$ en $(b+1)(b+2)$ verschillen 2 , want $b(b+3) = b^2 + 3b$ en $(b+1)(b+2) = b^2 + 3b + 2$.
   Alle getallen n met $n = b(b+1)(b+2)(b+3)$ zijn dus ook te schrijven als $c(c+2)$. Dan moet dus gelden $a(a+1) = c(c+2)$ .Er zijn drie mogelijkheden: $a < c, a = c, a > c$.
   Eerst $a < c$. Dat kan niet want dat houdt direct in dat $a+1 < c+2$, dus $a(a+1) < c(c+2)$.
   Dan $a = c$. Dat kan ook niet want dan geldt $a+1 < c+2$, dus weer $a(a+1) < c(c+2)$
   Tenslotte $a > c$. Dan moet a minstens gelijk zijn aan $c+1$, dus $a \geq c+1$ en $a+1 \geq c+2$ en dat betekent dat $a(a+1) \geq (c+1)(c+2) > c(c+2)$. Weer een tegenspraak.
   Er bestaan dus geen gehele n met de gevraagde eigenschap.

4. Als we kunnen bewijzen dat *PQ* en *RS* evenwijdig zijn aan *AC* en dat *PS* en *QR* evenwijdig zijn aan *BD* dan is *PQRS* een parallellogram. En ook een rechthoek omdat $AC \perp BD$. We bewijzen nu eerst dat *P* het midden is van *AB*. *P* ligt op de cirkel met *AM* als middellijn, dus $\angle APM = 90°$. *P* ligt ook op de cirkel met middellijn BM, dus ook $\angle BPM = 90°$. Dus $\angle APB = 180°$. *PM* staat loodrecht op de koorde *AB*, dus *P* is het midden van *AB,* omdat driehoek *MAB* gelijkbenig is. Evenzo bewijs je dat *Q* het midden *BC* is. Dus is *PQ* middenparallel in driehoek *ABC* en dus evenwijdig aan *AC*. Evenzo is *SR* een middenparallel in driehoek *ACD* en dus ook evenwijdig aan *AC*. Op eenzelfde manier bewijs je dat *PS* en *QR* evenwijdig zijn aan *BD*.

5. Bekijk het getal dat je krijgt door de getallen op de kaarten die op tafel liggen met 1 te verhogen en daarna allemaal met elkaar te vermenigvuldigen. Noem dit grote getal de WAARDE van de kaarten op tafel. Bij het begin is de WAARDE gelijk aan $(1+1)(2+1)(3+1)...(10+1) = 2 \times 3 \times 4 \times ... \times 11 = 11\,!$ en na afloop is de WAARDE gelijk aan het getal op de laatste kaart plus 1.
Als we twee kaarten met de getallen *a* en *b* pakken en vervangen door één kaart met het getal $a + b + ab$, dan verandert de WAARDE van de kaarten die op tafel liggen niet, want $(a+1)(b+1) = (a+b+ab)+1$. Dat betekent dat de WAARDE bij begin en na afloop gelijk zijn: het getal op de laatste kaart is dus $11! - 1 = 39916800 - 1 = 39916799$.