Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

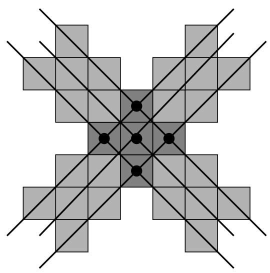
19 januari – 29 januari 2015

Uitwerkingen

A1. A) 5 Als je de omtrekken van de twee rechthoeken optelt, dan krijg je de omtrek van het vierkant plus twee keer de lengte van het lijnstukje in het midden. Dat lijnstukje in het midden is precies even lang als de zijde van het vierkant. De som van de omtrekken van de twee rechthoeken is dus gelijk aan zes keer de lengte van de zijde van het vierkant. Met andere woorden: de zijde van het vierkant heeft lengte $\frac{30}{6} = 5$.

A2. E) Erik Aad, Bas en Carl kunnen niet alle drie de waarheid gesproken hebben, want dan zouden de uitspraken van zowel Dave als Erik onwaar zijn. Een van Aad, Bas of Carl heeft gelogen en dus zijn de uitspraken van Dave en Erik waar. Aad en Bas kunnen niet allebei de waarheid gesproken hebben, want dan zou Dave gelogen hebben en we zagen net dat dat niet het geval is. Op dezelfde manier kunnen Bas en Carl niet allebei de waarheid gesproken hebben omdat de uitspraak van Erik anders onwaar zou zijn. Uit het feit dat de leugenaar Aad of Bas is en tegelijkertijd Bas of Carl is, concluderen we dat de leugenaar wel Bas moet zijn. Aad kwam dus als eerste aan en Carl als derde. Erik kwam tussen Bas en Carl binnen en dat kan alleen nog maar als Bas als laatste binnenkwam en Erik als vierde.

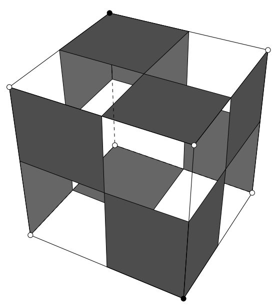
A3. A) 12081 De diagonalen bevatten beide 2015 vierkantjes. Omdat de afmetingen van het vierkant oneven zijn, doorsnijden de diagonalen elkaar wel, maar snijden ze de nevendiagonalen niet. Op de diagonalen zijn dus $2 \cdot 2015 - 1 = 4029$ vierkantjes grijs gekleurd. De vier nevendiagonalen bevatten ieder 2014 vierkantjes. Twee nevendiagonalen die niet in dezelfde richting lopen doorsnijden elkaar. Met andere woorden, er zijn vier snijpunten die 'dubbel gekleurd' worden. Op de nevendiagonalen worden dus $4 \cdot 2014 - 4 = 8052$ vierkantjes grijs gekleurd. In totaal zijn er $4029 + 8052 = 12081$ vierkantjes grijs gekleurd.



A4. E) 22475 Noem het gemiddelde van de twee getallen n. In dat geval is het ene getal gelijk aan $n - 5$ en het andere getal aan $n + 5$. Hun product is $(n-5)(n+5) = n^2 - 25$. We tellen daarom 25 op bij elk van de vijf antwoorden om te zien welk een kwadraat oplevert. We vinden: 22423, 22445, 22467, 22478 en 22500. Het is duidelijk dat $22500 = 150^2$, dus antwoord E is correct.

Ter controle berekenen we $149^2 = (150-1)^2 = 22500 - 300 + 1 = 22201$. Omdat $149^2 < 22423$ vallen antwoorden A tot en met D inderdaad af.

A5. C) 2 Na het verdelen zijn er in totaal 24 vierkanten op de kubus: 12 witte en 12 zwarte. Het aantal donkere hoekpunten kan niet gelijk zijn aan nul, want dan zou het aantal zwarte vierkanten niet meer zijn dan $8 \times 1 = 8$ (één per hoekpunt). Het aantal donkere hoekpunten kan ook niet gelijk zijn aan één, want dan zou het aantal zwarte vierkanten niet meer zijn dan $3 + 7 \times 1 = 10$. In de figuur zie je een oplossing waarbij slechts twee hoekpunten donker zijn. Het minimale aantal is dus 2.



A6. B) 2 Noem het aantal getallen dat we bij elkaar optellen n. Er zijn twee gevallen.

n **is oneven** In dit geval is er een middelste getal. Noem dat getal k. De som van de n getallen is dan $n \times k = 100$. Omdat n een oneven deler van 100 is (en groter dan 1), moet n gelijk zijn aan 5 of aan 25. In het eerste geval vinden we $k = \frac{100}{5} = 20$ en de oplossing $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$. In het tweede geval vinden we $k = 4$, maar dat geeft geen oplossing omdat het kleinste van de 25 getallen dan gelijk zou zijn aan $4 - 12$ en dat is een negatief getal.

n **is even** Zeg $n = 2m$. De twee getallen in het midden hebben als som een oneven getal, zeg k. De som bestaan nu uit m paren getallen, elk met som k. Dat wil zeggen $100 = k \times m$. Omdat k een oneven deler is van 100 (en groter dan 1), volgt dat $k = 5$ of $k = 25$. In het eerste geval is $m = 20$ en zijn de middelste twee getallen 2 en 3. Dat geeft geen oplossing, want dan zou het kleinste getal gelijk zijn aan $3 - 20$ en dat is negatief. In het tweede geval is $m = 4$ met als oplossing $100 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$.

A7. C) 18 Het middelste punt kan nooit rood gekleurd worden, omdat er dan altijd ofwel drie rode punten op de horizontale lijn ofwel drie rode punten op de verticale lijn komen. Op zowel de horizontale als de verticale lijn moeten twee punten rood gekleurd worden. Er zijn $\frac{4\times 3}{2} = 6$ manieren om twee punten rood te kleuren op de horizontale lijn. In twee van de gevallen zijn twee punten rood gekleurd die op dezelfde cirkel liggen. Dan zijn er nog twee mogelijke punten over op de verticale lijn die rood gekleurd kunnen worden en dat kan maar op één manier. In de andere vier gevallen liggen de twee rood gekleurde punten op verschillende cirkels en moeten er op de verticale lijn een punt op de kleine en een punt op de grote cirkel rood gekleurd worden; dat kan op $2 \times 2 = 4$ manieren. In totaal zijn er dus $2 \times 1 + 4 \times 4 = 18$ manieren voor Jaap om vier punten rood te kleuren.

A8. D) 1013 Het aantal uiteinden van takjes verdubbelt elke dag. Op dagen $1,\ 2,\ 3, \ldots$ komen er zo $1,\ 2,\ 4,\ 8, \ldots$ nieuwe takjes bij. In het algemeen komen er op dag n precies 2^{n-1} nieuwe takjes bij.

Het aantal takjes op de opeenvolgende dagen is dus $1,\ 1+2=3,\ 1+2+4=7,\ 1+2+4+8=15$ enzovoorts. Op dag n is het totaal aantal takjes gelijk aan $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

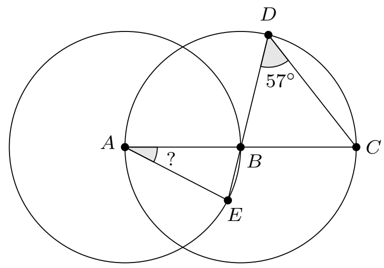
Het aantal blaadjes groeit elke dag met het aantal takjes op de dag ervoor. Op de opeenvolgende dagen zijn er dus $0,\ 0+1,\ 0+1+3,\ 0+1+3+7, \ldots$ blaadjes. In het algemeen is het aantal blaadjes op dag n gelijk aan

$$\begin{aligned}(2^0-1)+(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^{n-1}-1) &= (2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})-n \\ &= (2^n-1)-n.\end{aligned}$$

Het totaal aantal blaadjes aan het eind van dag 10 is dus $2^{10} - 11 = 1013$.

B1. 35 Als a, b, c drie opeenvolgende getallen uit de rij van Julia zijn, dan weten we dat $c = 2b - a$. Anders gezegd: $c - b = b - a$. Dit betekent dat het verschil tussen twee opeenvolgende getallen uit de rij steeds hezelfde is, zeg d. Als het eerste getal uit de rij x is, dan is de rij dus gelijk aan $x, x + d, x + 2d, x + 3d, \ldots$. Het tweede getal uit de rij is gelijk aan $55 = x + d$ en het honderdste getal is $2015 = x + 99d$. We zien dat $2015 - 55 = 98d$, dus $d = \frac{1960}{98} = 20$. Daarmee vinden we dat $55 = x + 20$, zodat $x = 35$. Het eerste getal uit de rij van Julia is dus 35.

B2. 48° De hoek bij D is gelijk aan de hoek bij C omdat driehoek CBD gelijkbenig is (tophoek B). Hoek DBC is dan $180° - 2 \times 57° = 66°$. Wegens overstaande hoeken is hoek ABE ook 66 graden. Omdat driehoek BAE gelijkbenig is (tophoek A), is de hoek bij E ook 66 graden. De hoek bij A is dan $180° - 2 \times 66° = 48°$.



B3. 70 Laat $n = abcd$ een getal van vier cijfers zijn, met a ongelijk aan 0. Het dubbele van n schrijven we als $2n = efghi$, waar het eerste cijfer, e, gelijk mag zijn aan 0. Merk eerst het volgende op.

- Het cijfer i is *even*, namelijk gelijk aan $2d$ of aan $2d - 10$.
- Het cijfer h is *even* als $d \leqslant 4$ en *oneven* als $d \geqslant 5$.
- Het cijfer g is *even* als $c \leqslant 4$ en *oneven* als $c \geqslant 5$.
- Het cijfer f is *even* als $b \leqslant 4$ en *oneven* als $b \geqslant 5$.
- Het cijfer e is *even* als $a \leqslant 4$ en *oneven* als $a \geqslant 5$.

Het getal $2n$ is dus afwisselend precies dan als $d \geqslant 5$, $c \leqslant 4$, $b \geqslant 5$ en $a \leqslant 4$. Om het aantal heel afwisselende getallen te tellen bekijken we twee gevallen.

1. Cijfers a, c zijn *even* en b, d zijn *oneven*. Voor a kunnen we kiezen uit $2, 4$ (want 0 mag niet), voor b uit $5, 7, 9$, voor c uit $0, 2, 4$ en voor d uit $5, 7, 9$. In totaal geeft dit $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ mogelijkheden.

2. Cijfers b, d zijn *even* en a, c zijn *oneven*. Voor a kunnen we kiezen uit $1, 3$, voor b uit $6, 8$, voor c uit $1, 3$ en voor d uit $6, 8$. In totaal geeft dit $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ mogelijkheden.

Alles bij elkaar zijn er dus $54 + 16 = 70$ heel afwisselende getallen van vier cijfers.

B4. 66 Nummer voor het gemak de leerlingen in de volgorde waarin ze aan de beurt komen. Leerling 20, die als laatste abseilt, heeft de getallen 1 tot en met 20 een keer gezien. Een kaartje met nummer 1 kreeg hij logischerwijs in de laatste ronde. In ronde 19 moet hij het kaartje met nummer 2 gekregen hebben (want er waren maar twee kaartjes). In ronde 18 kan hij alleen het kaartje met nummer 3 gekregen hebben, enzovoorts tot en met ronde 1 waarin hij het kaartje met nummer 20 kreeg.

Nu kijken we naar leerling 19. Die heeft in zijn laatste ronde, de 19e ronde, het kaartje met nummer 1 gekregen. In ronde 18 moet hij dan wel het kaartje met nummer 2 gekregen hebben (het kaartje met nummer 3 werd al door leerling 20 gepakt). In ronde 17 moet hij wel het kaartje met nummer 3 gekregen hebben (leerling 20 pakte het kaartje met nummer 4 en nummers 1 en 2 kunnen niet meer). Zo zien we dat leerling 19 in rondes $19, 18, 17, \ldots, 1$ kaartjes met nummers $1, 2, 3, \ldots, 19$ moet hebben gepakt, in die volgorde.

Als we zo doorredeneren vinden we dat leerling nummer n in rondes $n, n-1, n-2, \ldots, 1$ de kaartjes met nummers $1, 2, 3, \ldots, n$ kreeg, in die volgorde. Omdat Sara in ronde 1 het kaartje met nummer 11 kreeg, moet zij wel leerling nummer 11 zijn. Als zij de getallen op haar kaartjes optelt krijgt ze dus $11 + 10 + 9 + \cdots + 2 + 1 = 66$.