Nederlandse Wiskunde Olympiade voor Bedrijven

vrijdag 23 januari 2015

Uitwerking uitsmijter

Opgave.
Bepaal alle drietallen (x, y, z) van reële getallen die voldoen aan het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4z^2 &= 6y - 4, \\ 2xy - 4xz + 4yz &= y^2 + 5. \end{aligned}$$

Antwoord.
De drietallen zijn $(x, y, z) = (2, 3, \frac{1}{2})$ en $(x, y, z) = (1, 3, 1)$.

Uitwerking.
Er geldt

$$\begin{aligned} (x - y + 2x)^2 &= x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz \\ &= (6y - 4) - (y^2 + 5) \\ &= -(y^2 - 6y + 9) \\ &= -(y - 3)^2. \end{aligned}$$

Omdat kwadraten altijd niet-negatief zijn en hier een kwadraat gelijk is aan min een ander kwadraat, moeten beide kwadraten in dit geval 0 zijn. Dus $y = 3$ en $x - 3 + 2z = 0$, oftewel $x = 3 - 2z$. Als we dit invullen in de eerste vergelijking, vinden we

$$14 = 6 \cdot 3 - 4 = (3 - 2z)^2 + 3^2 + 4z^2 = 8z^2 - 12z + 18,$$

dus $8z^2 - 12z + 4 = 0$, oftewel $2z^2 - 3z + 1 = 0$. Dit kunnen we ontbinden als $(2z - 1)(z - 1) = 0$, dus $z = \frac{1}{2}$ of $z = 1$. We vinden in het eerste geval $x = 2$ en in het tweede geval $x = 1$. De oplossingen zijn dus $(x, y, z) = (2, 3, \frac{1}{2})$ en $(x, y, z) = (1, 3, 1)$. Beide oplossingen voldoen.