Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

20 januari – 30 januari 2014

Uitwerkingen

A1. B) 2 Stel dat we het veld B2 zwart kleuren. Dan mogen de 8 velden eromheen niet meer zwart gekleurd worden: de velden boven, onder, links en rechts van B2 staan namelijk in dezelfde kolom of rij als B2, en de andere vier velden raken diagonaal aan B2. Zo blijven alleen rij 4 en kolom D over en in elk mogen we maar één vakje zwart kleuren. In totaal kunnen dan niet meer dan 3 vakjes zwart worden gekleurd. We concluderen dat B2 niet zwart gekleurd mag worden.

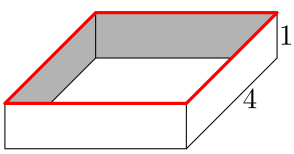
Op dezelfde manier kunnen we afleiden dat de velden B3, C2 en C3 niet zwart gekleurd mogen worden. In rij 2 kunnen we dus alleen A2 of D2 zwart kleuren. Als we A2 zwart kleuren, dan moeten we in rij 3 wel D3 zwart kleuren, want A3 staat in dezelfde kolom als A2. Voor rijen 1 en 4 is het dan alleen nog mogelijk om C1 en B4 zwart te kleuren. Dit geeft één oplossing. Als we in plaats van A2 vakje D2 zwart kleuren, vinden we de oplossing waarin D2, A3, B1 en C4 zwart gekleurd worden. In totaal zijn er dus 2 manieren om de zwart te kleuren hokjes te kiezen.

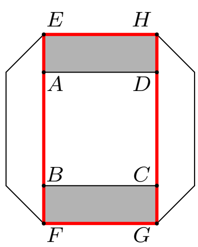
A2. D) $\frac{2}{5}$ Uit de gegevens leiden we af dat $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ van de karpers gele vrouwtjes zijn. Omdat de helft van de karpers vrouwtjes zijn, vinden we dat $\frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$ van de karpers rode vrouwtjes zijn. Als we dan ten slotte gebruiken dat drie vijfde van de karpers rood is, vinden we dat $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ van de karpers rode mannetjes zijn.

A3. C) 3 en 5 De reis waarin de kikker achtereenvolgens velden 3, 6, 1, 4, 7, 2 en 5 bezoekt (of juist in omgekeerde volgorde) laat zien dat velden 3 en 5 mogelijke beginvelden zijn van een reis. We zullen zien dat dit ook de enige mogelijke beginvelden zijn.

We noemen twee velden *buren* als de kikker van het ene veld naar het andere kan springen (en dus ook van de ander naar de een). Elke tussenstop in de reis van de kikker is dus een veld met minstens twee buren: het veld waar hij vandaan komt en het veld waar hij naartoe gaat. Omdat velden 3 en 5 slechts één buur hebben (veld 6 respectievelijk veld 2), moeten dit wel het beginpunt en eindpunt zijn van zijn reis. De andere velden kunnen dan alleen nog tussenstops zijn.

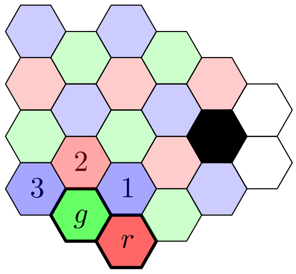
A4. B) 3 We bekijken de bovenrand van de papieren ring. Deze rand heeft lengte $4 \times 4 = 16$. In de opgevouwen figuur volgt de bovenrand rechthoek $EFGH$. Omdat $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = 1$, zien we dat $|AB| + |FG| + |CD| + |EH| = 16 - 4 = 12$. Deze vier lengtes zijn gelijk aan de lengte van de zijden van het vierkant $ABCD$. De zijden van het vierkant hebben dus lengte $\frac{12}{4} = 3$.





A5. E) 45 Noem het aantal deelnemers n. Het aantal deelnemers dat vóór Dion finishte, is $\frac{1}{2}(n-1)$ (de helft van alle deelnemers behalve Dion). Het aantal deelnemers dat vóór Jaap finishte, is $\frac{3}{4}(n-1)$. Omdat er tussen Dion en Jaap precies 10 deelnemers finishten, volgt dat $\frac{3}{4}(n-1) - \frac{1}{2}(n-1)$ gelijk is aan 11 (Dion zelf en de 10 deelnemers tussen Dion en Jaap). Er volgt dat $\frac{1}{4}(n-1) = 11$, dus $n = 4 \times 11 + 1 = 45$. Het aantal deelnemers was dus 45.

A6. D) 18 We kleuren eerst de twee aangegeven tegels onderaan met twee verschillende kleuren. Dat kan op zes manieren: drie mogelijkheden voor de eerste tegel en dan voor elke keuze twee mogelijkheden voor de tweede tegel. In de figuur zijn de kleuren rood (r) en groen (g) gekozen.



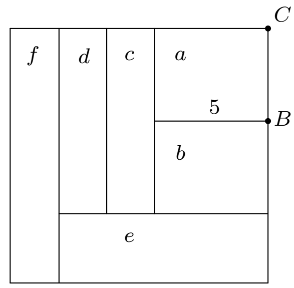
Nu de eerste twee tegels zijn gekleurd, liggen de kleuren van de meeste tegels vast. De tegel met nummer 1 kan enkel nog blauw zijn. Vervolgens moet tegel 2 wel rood zijn en dan moet tegel 3 wel blauw zijn. Zodoende liggen de kleuren van alle andere tegels vast, behalve van de twee tegels helemaal rechts (wit in de figuur). Voor deze laatste twee tegels zijn er drie mogelijke kleuringen. De bovenste en onderste tegel worden óf groen en rood, óf blauw en rood, óf blauw en groen.

Voor elk van de zes toegestane kleuringen van de eerste twee tegels zijn er zo precies drie manieren om de kleuring af te maken. In totaal zijn er dus $6 \times 3 = 18$ mogelijke kleuringen.

A7. C) $\frac{25}{8}$ Merk op dat hoek AMB gestrekt is. Er geldt dus dat $\angle AMD + \angle DMC + \angle CMB = 180°$. Merk op dat $\angle CMB = \angle MDA$ omdat driehoeken AMD en BMC gelijk zijn (drie dezelfde zijden). Dus geldt dat $\angle DMC = 180° - \angle AMD - \angle MDA = \angle DAM$, want de drie hoeken van driehoek AMD zijn samen 180 graden. Driehoeken DMC en DAM zijn dus twee gelijkbenige driehoeken met dezelfde tophoek. Ze zijn daarom aan elkaar gelijk op een vergrotingsfactor na. Dat wil zeggen dat $\frac{|CD|}{|DM|} = \frac{|DM|}{|AD|}$. De lengte van CD is dus gelijk aan $\frac{5}{8} \cdot 5 = \frac{25}{8}$.

A8. B) 4 Vanaf het genoemde punt kunnen we in dezelfde tijd 42% van de afstand stroomopwaarts varen en 58% van de afstand stroomafwaarts. Dat betekent dat de boot $\frac{58}{42}$ keer zo snel gaat met de stroom mee als tegen de stroom in. Noemen we de stroomsnelheid v, dan vinden we dus dat $\frac{25+v}{25-v} = \frac{58}{42}$. Dit geeft $58 \cdot (25 - v) = 42 \cdot (25 + v)$, oftewel $1450 - 58v = 1050 + 42v$. We vinden dat $400 = 100v$, oftewel $v = 4$.

B1. $\frac{24}{5}$ De zes rechthoeken hebben gelijke oppervlakte. Rechthoeken c en d zijn tweemaal zo hoog als rechthoek a en dus tweemaal zo smal. Zij hebben dus breedte $\frac{5}{2}$. Rechthoek e heeft dan breedte $\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+5=10$ en is daarom half zo hoog als rechthoek a. Maar dan is rechthoek f precies $\frac{5}{2}$ maal zo hoog als rechthoek a en moet dan breedte $\frac{5}{5/2}=2$ hebben. Het hele vierkant heeft daarom zijden van lengte $5+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+2=12$. Omdat het vierkant $\frac{5}{2}$ maal zo hoog is als rechthoek a, volgt dat de hoogte van rechthoek a gelijk is aan $|BC|=\frac{12}{5/2}=\frac{24}{5}$.



B2. 56 Er is één rijtje met enkel peren. Nu tellen we de rijtjes met minstens één appel. In zo'n rijtje moeten alle appels direct achter elkaar staan, want tussen twee appels mag nooit een peer staan. Willen we bijvoorbeeld 8 appels kiezen, dan kunnen die op posities 1 t/m 8, op posities 2 t/m 9, of op posities 3 t/m 10 staan, drie mogelijkheden in totaal. Op deze manier vinden we voor 10 appels 1 rijtje, voor 9 appels 2 rijtjes, voor 8 appels 3 rijtjes, en zo door tot en met 1 appel waavoor er 10 rijtjes zijn. In totaal vinden we dus $1+2+3+\cdots+10=55$ rijtjes met minstens één appel. Het totaal aantal rijtjes is daarom $55+1=56$.

B3. 18126 Een goede strategie is om eerst kleine voorbeelden te bekijken. Zo vinden we achtereenvolgens

$$\begin{aligned} 9\times 4 &= 40-4 &&= 36,\\ 99\times 44 &= 4400-44 &&= 4356,\\ 999\times 444 &= 444000-444 &&= 443556,\\ 9999\times 4444 &= 44440000-4444 &&= 44435556. \end{aligned}$$

Het patroon zal duidelijk zijn. Om de vraag te beantwoorden merken we op dat $999\ldots99 = 1000\ldots00-1$, waarbij het eerste getal 2014 nullen heeft. Het product is daarom gelijk aan

$$\underbrace{444\ldots44}_{\text{2014 vieren}}\underbrace{000\ldots00}_{\text{2014 nullen}}-\underbrace{444\ldots44}_{\text{2014 vieren}}=\underbrace{444\ldots44}_{\text{2013 vieren}}3\underbrace{555\ldots55}_{\text{2013 vijven}}6.$$

Als we de cijfers hiervan optellen, krijgen we $2013\cdot 4+3+2013\cdot 5+6=2013\cdot 9+9=18126$.

B4. 3 We laten eerst zien dat elke mooie tabel een score van minstens 3 heeft. Bekijk zo'n tabel en noem het getal precies in het midden a. De vijf getallen in de middelste rij hebben a als gemiddelde en zijn niet allemaal gelijk aan a. Minstens een van deze vijf getallen moet dus kleiner zijn dan a. Op dezelfde manier moet (minstens) een van de vijf getallen in de middelste kolom kleiner zijn dan a, zeg getal b. Omdat b het gemiddelde is van de getallen in zijn rij, is een van de vijf getallen in deze rij kleiner dan b en dus ook kleiner dan a. We hebben nu drie getallen gevonden op verschillende plekken in de tabel, die elk kleiner zijn dan het getal precies in het midden. De score is dus minstens 3.

4	4	3	4	0
4	4	3	4	0
3	3	0	3	-9
4	4	3	4	0
0	0	-9	0	-36

In de figuur aan de rechterkant zie je dat er een mooie tabel bestaat met score 3. Een score van 3 is dus de laagst mogelijke score.