Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

21 januari – 31 januari 2013

Uitwerkingen

A1. B) 2 Gegeven is dat het stoplicht rood is op 12:05. Voor een stoplicht van periode 1 liggen de kleuren voor de tijdstippen 12:05 t/m 12:12 dan vast, die zijn afwisselend rood en groen. Voor periode 2 zijn er twee mogelijkheden en voor periode 3 zijn er drie mogelijkheden:

periode	12:05	12:06	12:07	12:08	12:09	12:10	12:11	12:12
1 min	rood	groen	rood	groen	rood	groen	rood	groen
2 min	rood	rood	groen	groen	rood	rood	groen	groen
2 min	rood	groen	groen	**rood**	**rood**	groen	groen	rood
3 min	rood	rood	rood	**groen**	**groen**	groen	rood	rood
3 min	rood	rood	groen	**groen**	**groen**	rood	rood	rood
3 min	rood	groen	groen	groen	rood	rood	rood	groen

Van deze zes mogelijkheden voldoen er drie aan de voorwaarde dat het licht rood is op 12:12. Voor de tijdstippen 12:08 en 12:09 geeft dit twee kleurcombinaties: rood–rood en groen–groen.

A2. C) 120 Tweemaal de lengte van een rechthoekje is gelijk aan driemaal zijn breedte. De verhouding lengte : breedte is dus $3:2$. Met een omtrek van 20, moeten de lengte en breedte dus gelijk zijn aan 6 en 4. De oppervlakte van een rechthoekje is dan $6 \times 4 = 24$ en de oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is vijfmaal zo groot, dus $5 \times 24 = 120$.

A3. B) b Voor de sommen van tweetallen zien we dat

$$e + a < c + d < a + b < b + c < d + e.$$

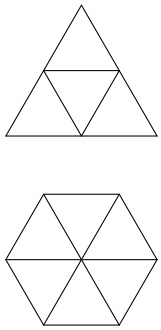
Elke som van vier getallen kun je krijgen door twee van deze tweetallen op te tellen. Zo is bijvoorbeeld $a+b+c+e$ gelijk aan $(e+a)+(b+c)$. Van alle viertallen heeft het viertal a, c, d, e de kleinste som, want $a+c+d+e = (e+a)+(c+d)$ is de som van de twee kleinste tweetallen. Het overgebleven getal, namelijk b, is dus het grootst van de vijf. Immers, het grootste getal is het getal waarvoor de overige vier getallen de kleinste som hebben.

A4. A) 3 De volgorde waarin lampjes worden ingedrukt maakt niet uit voor het eindresultaat. Door de drie lampjes in de bovenste rij in te drukken veranderen alle lampjes van *aan* naar *uit*. De lampjes in de bovenste rij veranderen namelijk driemaal van toestand en de overige lampjes precies éénmaal.

Het is niet mogelijk alle lampjes *uit* te krijgen door twee (of minder) lampjes in te druken. Immers, er zal dan een lampje zijn dat niet in dezelfde rij of kolom staat als een van de ingedrukte lampjes. Dit lampje zal dus *aan* blijven.

A5. C) $\frac{1}{15}$ We mogen voor het gemak wel aannemen dat er 20 dozen zijn; dat maakt voor de verhoudingen niet uit. Van de 20 dozen zijn er dus 5 leeg. Van de 5 dozen die worden geopend blijkt een vijfde niet leeg te zijn, precies 1 doos. Omdat er 4 geopende dozen leeg zijn, blijft er nog precies 1 lege doos over onder de 15 ongeopende dozen.

A6. D) 3 : 2 We verdelen de zeshoek in zes gelijkzijdige driehoekjes en de driehoek in vier gelijkzijdige driehoekjes zoals in de figuur. Omdat de zeshoek en de driehoek gelijke omtrek hebben, zijn de zijden van de driehoek tweemaal zo lang als die van de zeshoek. De driehoekjes in deze verdelingen zijn dus even groot. De verhouding tussen de oppervlaktes is daarom 6 : 4, oftewel 3 : 2.



A7. C) 3125 We bekijken de laatste vier cijfers van de machten van 5:

$$\begin{array}{rclrcr} 5^1 & = & 0005 & 5^5 & = & 3125 \\ 5^2 & = & 0025 & 5^6 & = & 1\,5625 \\ 5^3 & = & 0125 & 5^7 & = & 7\,8125 \\ 5^4 & = & 0625 & 5^8 & = & 39\,0625 \end{array}$$

Bij het berekenen van de laatste vier cijfers van een macht van 5, is het voldoende om de laatste vier cijfers van de vorige macht van 5 te weten. Zo zijn de laatste vier cijfers van 5×390625 en van 5×0625 gelijk, namelijk 3125. Omdat de laatste vier cijfers van 5^4 en 5^8 gelijk zijn, zullen de laatste vier cijfers van de machten van 5 zich vanaf daar elke vier stappen herhalen. De laatste vier cijfers van 5^{2013} zijn dus gelijk aan die van 5^{2009} en van 5^{2005}, enzovoorts tot en met die van $5^5 = 3125$. De laatste vier cijfers zijn dus 3125.

A8. B) 64 Omdat elk van de twintig leerlingen een ander aantal vragen goed had, werd in totaal minstens $0 + 1 + 2 + \cdots + 19 = 190$ keer een vraag goed beantwoord. Aangezien elke vraag hoogstens driemaal goed werd beantwoord, waren er minstens $\frac{190}{3} = 63\frac{1}{3}$ vragen en dus ook minstens 64.

Een situatie met 64 vragen is ook daadwerkelijk mogelijk. Laat de twintig leerlingen achtereenvolgens 0 tot en met 19 vragen goed hebben. We verdelen de leerlingen in drie groepen:

I bestaat uit de leerlingen met 0, 1, 2, 3, 4, 17, 18 of 19 vragen goed,

II bestaat uit de leerlingen met 5, 6, 7, 14, 15 of 16 vragen goed en

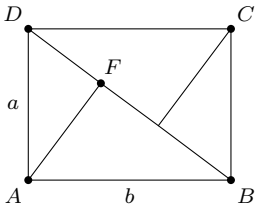
III bestaat uit de leerlingen met 8, 9, 10, 11, 12 of 13 vragen goed.

Voor elk van de drie groepen is het totale aantal juist beantwoorde vragen niet meer dat 64. Voor elke groep kunnen we het dus zó kiezen dat de juist beantwoorde vragen van die leerlingen allemaal verschillend zijn. Zo wordt elke vraag door hoogstens drie leerlingen goed beantwoord.

B1. 244882 We bekijken alleen getallen met de even cijfers 2, 4 en 8. Als zo'n getal eindigt op cijfer 4 of 8, dan is het getal een veelvoud van 20 plus 4 of 8 en dus deelbaar door 4. Als zo'n getal eindigt op cijfer 2, dan is het een veelvoud van 20 plus 2 en dus niet deelbaar door 4. Het laatste cijfer moet dus een 2 zijn. De overgebleven cijfers kunnen we van laag naar hoog sorteren. We vinden dan 244882.

B2. $\frac{3}{2}$ Driehoeken ADF, BDA en BAF zijn gelijkvormig (hh). Daarom geldt

$$\frac{b}{a} = \frac{|BA|}{|DA|} = \frac{|AF|}{|DF|} = \frac{|BF|}{|AF|}.$$



Oftewel

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{|AF|}{|DF|} \cdot \frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|BF|}{|DF|} = \frac{9}{4}.$$

Dus vinden we $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

B3. 30 minuten De tijd die Fred erover doet om van de middelste naar de laatste halte te fietsen en daarna naar de middelste halte terug te rennen, is gelijk aan de tijd die het hem kost om van de middelste halte naar de eerste halte te fietsen plus de tijd die hij nodig heeft om van de middelste naar de laatste halte te rennen. Immers, de afstanden tot de twee haltes zijn gelijk.

Gegeven is dat dit precies gelijk is aan de tijd die de bus nodig heeft om naar de eerste halte te rijden plus de tijd om naar de laatste halte te rijden. Dit is samen precies gelijk aan tweemaal de tijd die de bus nodig heeft om naar de middelste halte te rijden: $2 \times 15 = 30$ minuten.

B4. 25 keer De combinatie "2013" komt 13 keer voor als onderdeel van een van de volgende getallen: 2013, 12013, 22013 en 20130 t/m 20139. Daarnaast komt "2013" ook voor als eind van een getal gevolgd door het begin van het volgende getal. De verschillende mogelijke splitsingen zijn:

2|013 komt niet voor, want geen getal begint met een '0'.

20|13 komt 11 keer voor: 1320|1321 en 13020|13021 t/m 13920|13921.

201|3 komt slechts 1 keer voor: 3201|3202, want we noteren geen getallen groter dan 30 000.

Het is makkelijk na te gaan dat "2013" niet voorkomt als combinatie van drie opeenvolgende getallen. In totaal komt "2013" dus $13 + 11 + 1 = 25$ keer in de cijferrij voor.

© 2013 Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade