

Eerste ronde

Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 30 januari 2009



Opgaven

- Beschikbare tijd: 2 uur.
- De A-vragen zijn vijfkeuzevragen. Bij elke vraag is één van de vijf mogelijkheden juist. Geef op het antwoordformulier duidelijk de letter aan waarachter het goede antwoord staat. Voor een goed antwoord krijg je 2 punten. Bij een fout antwoord krijg je geen puntenaftrek.
- Bij de B-vragen moet je een getal (of getallen) als antwoord geven. Voor een juist antwoord krijg je 5 punten. Werk rustig en nauwkeurig, want een rekenfout kan tot gevolg hebben dat je oplossing fout gerekend wordt; dan krijg je 0 punten.
LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals bijvoorbeeld $\frac{11}{81}$ of $2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi + 1$.
- Je mag geen rekenmachine of iets dergelijks gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer en een liniaal of geodriehoek. En natuurlijk je gezonde verstand.
- Het is een wedstrijd en geen examen. Het gaat er om dat je plezier hebt in het werken aan ongewone wiskundeopgaven. Veel succes!

A-vragen

A1. Ella scoort 60% goed bij een toets van 25 vragen, 70% goed bij een toets van 30 vragen en 80% goed bij een toets van 45 vragen. Als de toetsen worden samengevoegd tot één toets met 100 vragen, wat is dan haar score voor die toets van 100 vragen?

- (A) 68% (B) 70% (C) 72% (D) 74% (E) 76%

A2. Voor hoeveel van de gehele getallen 10 tot en met 99 geldt dat de som van de cijfers gelijk is aan het kwadraat van een geheel getal? (Een voorbeeld is het getal 27 met som van de cijfers $2 + 7 = 9 = 3^2$.)

- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

A3. Ronald gooit met drie dobbelstenen. Die zien er net zo uit als gewone dobbelstenen, alleen staan er op de zes zijvlakken andere getallen.

Op de eerste dobbelsteen staan de getallen: 1, 1, 2, 2, 3 en 3.

Op de tweede dobbelsteen staan de getallen: 2, 2, 4, 4, 6 en 6.

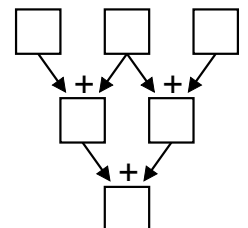
En op de derde dobbelsteen staan de getallen: 1, 1, 3, 3, 5 en 5.

Hij telt de drie getallen die hij gooit bij elkaar op.

Hoe groot is de kans dat het resultaat een oneven getal is?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

A4. Drie verschillende getallen uit de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ worden in de bovenste drie vierkantjes geplaatst van de figuur hiernaast. Vervolgens worden de getallen opgeteld volgens het aangegeven schema. Noem het grootste mogelijke getal dat in het onderste vierkantje kan komen Max en het kleinste mogelijke getal dat in het onderste vierkantje kan komen Min. Wat is de waarde van $\text{Max} - \text{Min}$?



- (A) 16 (B) 24 (C) 25 (D) 26 (E) 32

A5. De lengtes van de diagonalen van een ruit hebben een verhouding 3 : 4. (Een ruit is een vierhoek met vier zijden die even lang zijn.) De som van de lengtes van de diagonalen is 56. Hoe groot is de omtrek van de ruit?

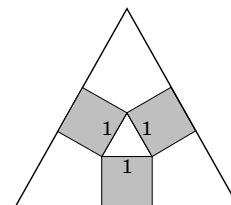
- (A) 80 (B) 96 (C) 100 (D) 108 (E) 160

A6. Wouter gaat lopend van zijn huis naar zijn sportclub. Hij had ook zijn racefiets kunnen pakken; daarmee gaat de tocht zeven keer zo snel. Maar die liet hij thuis staan. Na 1 km is hij op een punt aangekomen dat het in tijd niets uitmaakt of hij verder doorloopt of juist naar huis terugloopt om alsnog met zijn racefiets te gaan. Hoeveel km is hij op dat moment nog verwijderd van zijn sportclub?

- (A) $\frac{8}{7}$ (B) $\frac{7}{6}$ (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{5}{4}$ (E) $\frac{4}{3}$

A7. Op de zijden van een gelijkzijdige driehoek worden drie vierkanten getekend. De zijden van de vierkanten die evenwijdig zijn met de zijden van de driehoek worden verlengd tot ze elkaar snijden. De drie snijpunten vormen weer een gelijkzijdige driehoek. De lengte van de zijde van de oorspronkelijke driehoek is 1. Wat is de lengte van de zijde van de grote gelijkzijdige driehoek?

- (A) $1 + 2\sqrt{2}$ (B) $5 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $1 + 2\sqrt{3}$ (E) $2\sqrt{6}$

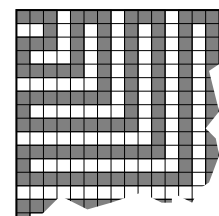


A8. Bekijk alle getallen van vier cijfers waarin elk van de cijfers 3, 4, 6 en 7 precies eenmaal voorkomt. Hoeveel van deze getallen zijn deelbaar door 44?

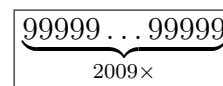
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 12

B-vragen

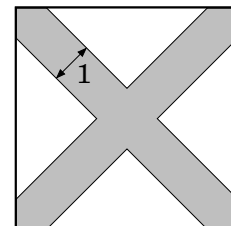
B1. Op een vel papier staat een rooster van 101 bij 101 witte vierkantjes. Er is een slang gevormd door vierkantjes grijs te kleuren zoals in bijgaande figuur. De slang begint linksboven en loopt door tot hij niet verder kan. Slechts een deel van het rooster is afgebeeld. Hoeveel vierkantjes zijn er in totaal grijs gekleurd in het volledige rooster van 101 bij 101 vierkantjes?



B2. Het gehele getal N bestaat uit 2009 negens achter elkaar geschreven. Een computer berekent $N^3 = (99999 \dots 99999)^3$. Hoeveel negens bevat het uitgeschreven getal N^3 in totaal?



B3. Met een brede kwast worden de diagonalen van een vierkante tegel geverfd, zie de figuur. Precies de helft van het oppervlak van de tegel is geverfd. De breedte van de verfkwast is 1, zoals aangegeven. Bereken de lengte van de zijde van de tegel.



B4. Bepaal een drietal gehele getallen (a, b, c) dat voldoet aan de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 18 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 756 \\ a^2 &= bc \end{aligned}$$