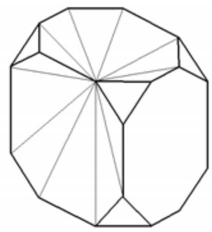
Uitwerkingen 1e ronde 2000

A1 Het getal 7 kan op acht manieren geschreven worden als de som van drie getallen: 007, 016, 025, 034, 115, 124,133 en 223. Elk van die mogelijkheden geeft een aantal mogelijke getallen. Zo geeft 115 drie getallen: 115,151 en 511. 034 geeft 34, 43, 304, 340, 403 en 430. Dus 007, 115, 133 en 223 geven samen 4*3=12 mogelijke getallen en 016, 025, 034 en 124 samen 4*6=24. totaal dus 36.

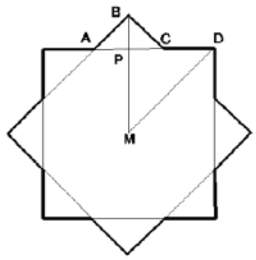
A2 Elk hoekpunt wordt met de 23 andere hoekpunten verbonden. Onder die lijnstukken zijn altijd 3 ribben en 2*5 zijvlakdiagonalen, zie figuur. Uit elk hoekpunt zijn er dus 10 lijnstukken die binnen de kubus liggen. Vanuit de 24 hoekpunten dus 24*10, maar dan is elk lijnstul tweemaal geteld. Totaal dus 120.



A3 We beginnen achteraan en gaan van 2000 terug naar 0, waarbij het duidelijk is dat we zo veel mogelijk moeten delen door 3.
$2000 \to 1999 \to 1998 \to 666 \to 222 \to 74 \to 73 \to 72 \to 24 \to 8 \to 7 \to 6 \to 2 \to 1 \to 0$. Dus 14 zetten.

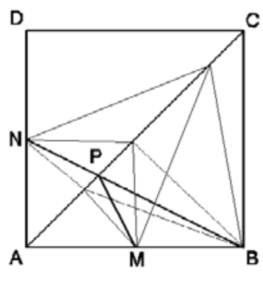
A4 $99+999+9999+...+999...999=(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-1)+...+(10^{100}-1)=$
$10^2+10^3+10^4+...+10^{100}-99=1111...11100-99$, waarbij 1111...11100 99 maal een 1 bevat.
Als je dat getal met 99 vermindert, dan verandert het einde van ...11100 in ...11001.
Het gevraagde aantal enen is dus 99.

A5 $MP=5, MB=MD=5\sqrt{2},$ dus $BP=5(\sqrt{2}-1)$. Opp van driehoek $ABC=(5(\sqrt{2}-1))^2=25(3-2\sqrt{2})$. De totale oppervlakte wordt dan
$10\times 10+4\times 25(3-2\sqrt{2})=200(2-\sqrt{2})$



B1 Omdat het getal eindigt op 26 heeft het de vorm a...b26, dus a...b00 is ook deelbaar door 26 en moet dus gelden dat a...b deelbaar is door 13, omdat 100 al deelbaar is door 2. Omdat de som van de cijfers gelijk moet zijn aan 26 moet de som van de cijfers van a...b gelijk zijn aan 18. Dat betekent dat a...b ook deelbaar is door 9. Dus moet a...b deelbaar zijn door 9*13=117. We moeten dus het kleinste veelvoud van 117 hebben waarvan de som van de cijfers gelijk is aan 18. 117, 134, 351, 468 raak!, dus 46826.

B2 N is het midden van AD. Voor elk punt P op AC is de afstand tot M gelijk aan de afstand tot N.
Dus MP+PB=NP+PB. NP+PB is minimaal als we voor P simpel het snijpunt van BN en AC nemen.
Driehoek PNA gelijkvormig is met driehoek PBC, dus PA:PC=NA:BC=1:2. Dus is AP gelijk aan AC/3= $2\sqrt{2}$



B3 Nummer de plaatsen :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	1	7	4	2	9	13	11	10	12	8	5	3

De kaart die op plaats 1 staat gaat naar plaats 2, de kaart op plaats 2 gaat naar plaats 5, de kaart op plaats 3 naar plaats 13, enz. We kijken na hoeveel keer schudden kaart 1 weer op zijn plaats staat: 1 naar 2 naar 5 naar 12 naar 10 naar 9 naar 6 naar 1. Dus na zeven keer schudden staat 1 weer op zijn plaats en dat geldt ook voor de kaarten die om te beginnen op plaats 2, 5, 12, 10, 9, en 6 staan. De kaart op plaats 3. staat na drie keer schudden weer op zijn plaats, want 3 naar 13 naar 7 naar 13. De kaart op plaats 4 blijft keurig op zijn plaats. Rest kaart 8, en die is na twee keer weer op zijn plaats via 8 naar 11 naar 8. Voor een aantal kaarten moeten we 7 keer schudden, voor een ander aantal 3 keer en voor een paar 2 keer. Wil alles weer op zijn plaats komen dan moten we dus 7*3*2=42 keer schudden.

B4 $c\times abbbbb = a\times bbbbbc$ ofwel $(10^5\times a+11111\times b)\times c=(10b\times 11111+c)\times a$.

Uitwerken en herschikken levert: $ac\times(10^5-1)=11111\times(10ab-bc)$ ofwel

$9ac=10ab-bc$. En dat is te schrijven als $\frac{9}{b}+\frac{1}{a}=\frac{10}{c}$, ofwel $c=\frac{10ab}{9a+b}$.

Omdat c geheel moet zijn valt het zoekwerk mee:

Eerst $a=1$, dus $c=\frac{10b}{9+b}$. Dat geeft de oplossingen $b=6, c=4$ en $b=9, c=5$

Dan $a=2$.,. dus $c=\frac{20b}{18+b}$ .. en dat geeft de oplossing $b=6, c=5$

Voor $a=3$ is er geen oplossing en voor $a=4$ vinden we $b=9, c=4$

Voor de resterende waarden van a zijn er geen oplossingen meer.

Al met al dus: $\frac{166666}{666664}=\frac{1}{4}$, $\frac{199999}{999995}=\frac{1}{5}$, $\frac{266666}{666665}=\frac{2}{5}$, $\frac{499999}{999998}=\frac{4}{8}$

Er zijn dus naast het voorbeeld nog drie andere oplossingen.

(Uit de manier van oplossen blijkt direct dat het niet beslist nodig is dat er 5 b's staan. Voor andere aantallen gaat het ook goed.