De ideale voorbereiding op de

Wiskunde Olympiade

- **De meest recente opgaven en moderne methodes**
- **Extra uitgebreide uitwerkingen**
- **Hints, tips and trucs**

NEDERLANDSE
WISKUNDE
OLYMPIADE

Jesse He
H6A
10 januari 2012

Een wiskunde D project in opdracht van mw. Lambriex

Inhoudsopgave

Inleiding

Vanwege mijn deelnames aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade heb ik besloten om me hier nog eens in te verdiepen voor de vrije opdracht van wiskunde D. Dit, omdat ik altijd erg enthousiast heb meegedaan aan deze wedstrijd en omdat ik het ook nog eens ontzettend leuk vind om me bezig te houden met het soort wiskunde vragen dat niet in onze schoolboeken voorkomt, maar waarbij je de opgedane kennis wel voor kunt gebruiken. Ik heb besloten om een extra uitdaging aan te gaan en de opdracht een leuke uitbreiding te geven, daarbij is gekozen om een soort hulpboek te maken voor de latere enthousiasten, dit boek zou ze moeten helpen bij hun voorbereiding. De vragen zijn nu niet alleen opgelost, het is zodanig uitgelegd op een manier dat ook de mensen het kunnen snappen die wat meer moeite hebben met wiskunde, de stappen zijn veel uitgebreider uitgewerkt en uitgelegd en er worden handige methodes aangeleerd, het gebruik van een stappenplan, herhaling van theoretische kennis, tips en slimme trucjes, zijn slechts enkele dingen die extra zijn opgenomen. Ook is er gesteefd naar een aantrekkelijke presentatie en het gebruik van makkelijkere woorden en zinnen, zodat ook de jongere Willie Wortels zonder al te veel moeite door het boek zouden moeten kunnen komen. Omdat er geen echt onderzoek is gedaan naar een wiskundig verschijnsel, zijn er ook geen verwachtingen uit te spreken over de resultaten, wel kan hoop ik dat het boek zodanig goed is dat deze ook echt gebruikt kan gaan worden en dat de gebruiker ervan er ook daadwerkelijk meer aan heeft dan alleen de opgaven te maken en deze na te kijken met de uitwerkingen op de site van de Wiskunde Olympiade!

Ik wens je veel succes met de Nederlandse Wiskunde Olympiade, maar vooral ook heel veel plezier in het maken van de opgaven!

Inleiding der Wiskunde Olympiade

De Internationale Wiskunde Olympiade (IWO) is een wiskundewedstrijd die jaarlijks wordt gehouden voor middelbare scholieren. Ongeveer 100 landen sturen een team die bestaat uit maximaal zes scholieren, één teamleider, één plaatsvervangende teamleider en eventuele waarnemers. Elk jaar komen er ongeveer 600 scholieren bijeen om zes wiskundeopgaven tijdens de wedstrijd zo goed mogelijk op te lossen. [1]

Voorafgaand aan de IWO, vindt de Nederlandse Wiskunde Olympiade (NWO) plaats. Een wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren die jaarlijks in Nederland wordt georganiseerd voor leerlingen van havo en vwo. De NWO bestaat uit twee rondes en een nationale finale, gevolgd door een trainingsprogramma. Daarna wordt er een selectie, onder andere door een teamselectietoets, van zes leerlingen gemaakt die Nederland vertegenwoordigen voor de Internationale Wiskunde Olympiade. [2]

Geschiedenis van de Wiskunde Olympiade

De eerste Internationale Wiskunde Olympiade werd gehouden in 1959 in Roemenië en is daarmee de oudste internationale wetenschapsolympiade. Sindsdien is de IWO elk jaar gehouden, behalve in 1980. De Internationale Wiskunde Olympiade begon als een toernooi voor Oostbloklanden, in de loop der jaren heeft de wedstrijd zich ontwikkeld tot de belangrijkste wiskundewedstrijd en wordt dit prestigieuse evenement erkend door vrijwel elk land en elke onderwijsinstelling. [1]
De Nederlandse Wiskunde Olympiade bestaat al vanaf 1962 en is daarmee de ook oudste Nederlandse schoololympiade. De tweede ronde is pas vanaf 2010 geintroduceerd. [2]

Opzet van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

De Nederlandse Wiskunde Olympiade bestaat uit drie rondes.

Eerste ronde

- Beschikbare tijd: 2 uur.
- De tweede ronde bestaat uit acht A-opgaven en vier B-opgaven.
- De A-vragen zijn vijfkeuzevragen. Bij elke vraag is één van de vijf mogelijkheden juist. Voor een goed antwoord krijg je 2 punten, voor een fout antwoord 0 punten.
- Bij de B-vragen moet je een getal als antwoord geven. Voor een goed antwoord krijg je 5 punten en voor een fout antwoord 0 punten.
- Geef antwoorden in de exacte vorm.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen pen en papier, een passer, een liniaal of geodriehoek.

De eerste ronde vindt plaats op middelbare scholen in Nederland. Deze is bedoeld voor middelbare scholieren in de bovenbouw, maar deelname voor onderbouwers is ook mogelijk. Sinds 2006 bestaat de eerste ronde uit een multiple choice-gedeelte van acht zogenaamde A-vragen en een open gedeelte van vier B-vragen. De meerkeuze A-vragen leveren 2 punten op voor een goed antwoord en de open B-vragen vijf punten. Een deelnemer krijgt alleen punten voor het uiteindelijke antwoord, de uitwerking is niet van belang.

Tweede ronde

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De tweede ronde bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Bij de B-opgaven is het antwoord steeds een getal, dat je op het antwoordformulier moet invullen in een exacte vorm. Een goed antwoord levert 4 punten op, een fout antwoord 0 punten.
- Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; ook je redenering en de manier van oplossen moet je duidelijk opschrijven. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek.

Sinds 2010 is er een tweede ronde (voorheen werd de finale ook wel tweede ronde genoemd), waar de ongeveer 600 best scorende leerlingen van de eerste ronde voor uitgenodigd worden. De tweede ronde bestaat uit vijf open B-vragen, voor elk goed antwoord worden vier punten toegekend. Daarnaast zijn er nog twee open C-vragen waarvoor elk 10 punten te behalen is en waar ook de hele uitwerking meetelt voor de behaalde score.

Finale

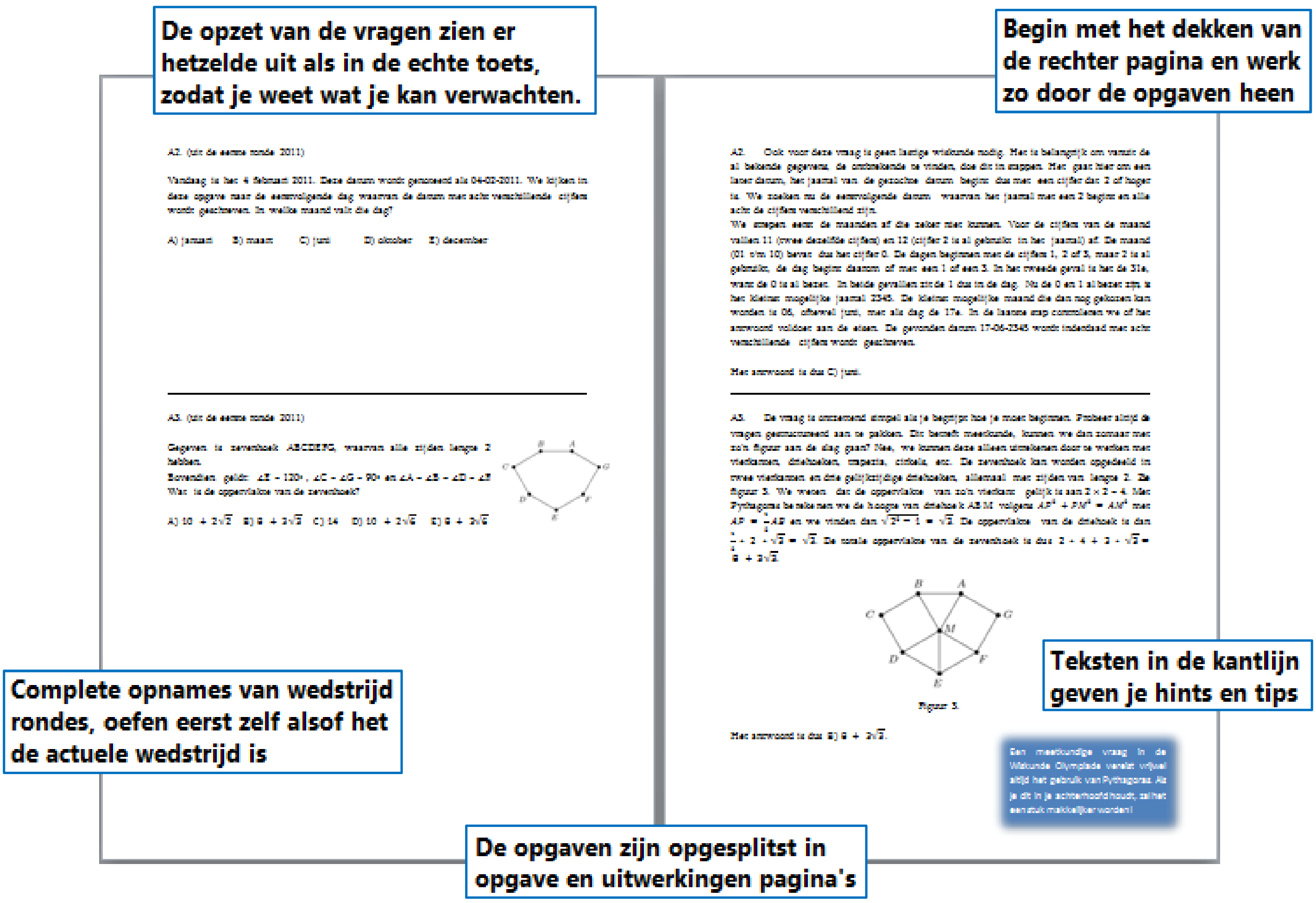
- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Hierbij telt niet alleen het (eind)antwoord; ook de manier van oplossen moet je duidelijk beschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek.

De 130 leerlingen die het beste hebben gepresteerd bij de tweede ronde, worden uitgenodigd voor de nationale finale. Ook leerlingen die bij de Kangoeroewedstrijd of de Pythagoras Olympiade goed hebben gepresteerd, worden uitgenodigd. De finale wordt gehouden op de Technische Universiteit Eindhoven en bestaat uit vijf open vragen die van hoger niveau zijn dan de eerdere vragen, voor elk van deze vragen kunnen er weer tien punten worden gehaald. De winnaars zijn de tien deelnemers die de meeste punten behalen. Bij gelijk aantal punten telt het aantal punten dat bij de eerdere rondes is behaald mee. Zij komen in een trainingsgroep, waarvan de beste zes Nederland gaan vertegenwoordigen bij de Internationale Wiskunde Olympiade. [2]

Meedoen?

Zit je in klas 4 of 5 of in de onderbouw van havo of vwo en ben je goed in wiskunde, creatief en heb je behoorlijk wat pit en doorzettingsvermogen? Dan is de Wiskunde Olympiade iets voor jou. Ook als je in de onderbouw zit, kun je meedoen. De opgaven zijn voor iedereen hetzelfde, maar leerlingen uit lagere klassen hebben minder punten nodig om door te gaan naar de volgende ronde. De aanmelding gaat via je wiskunde docent of docente. [3]

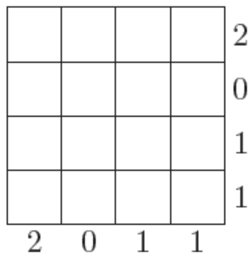
Hoe gebruik je dit boek?



A-vragen | Eerste ronde

A1. (uit de eerste ronde 2011)

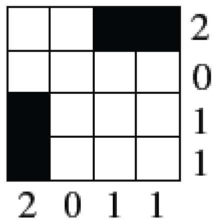
De velden van een 4×4-bord worden wit of zwart gekleurd. Naast elke rij en onder elke kolom staat aangegeven hoeveel velden in die rij of kolom zwart moeten zijn.
Op hoeveel manieren kan het bord gekleurd worden?



A) 0 B) 1 C) 4 D) 5 E) 8

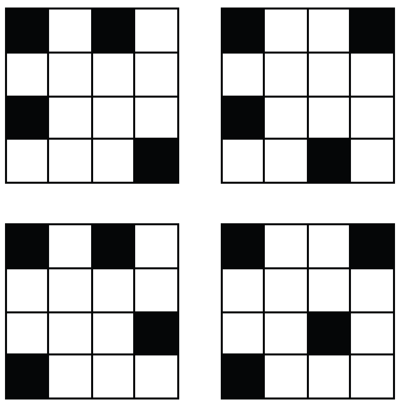
A1. Dit is een vraag die geen moeilijke wiskunde vereist, maar een waarbij het belangrijk is dat je eerst goed nadenkt en zorgt dat je de vraag begrijpt. Probeer altijd eerst de gegevens gebruiken die al gegeven zijn. Je zult opmerken dat alle vakjes in zowel de tweede rij als in de tweede kolom wit gekleurd moeten zijn. Nu gaan de vraag gestructureerd oplossen. Als we beginnen met het vakje linksboven, bekijken we vanuit daar naar elke mogelijk manier om het bord in te kleuren.

Als dit vakje wit is, moeten allebei de laatste twee vakjes in de eerste rij en kolom zwart zijn. Dit vanwege de 'enen' naast de zijkanten. Het bord is nu volledig gekleurd en er is geen andere manier mogelijk als het vakje linksboven wit is. Zie figuur 1. Je kan je uitkomst controleren door na te gaan of aan elk aantal dat langs de zijkanten staat wordt voldaan.



Figuur 1.

Dit vakje kan ook zwart zijn, dan moet in de eerste kolom en in de eerste rij elk nog één vakje zwart gekleurd worden. Je ziet dus dat er in de eerste rij 2 mogelijkheden zijn, als wel in de eerste kolom, dit geeft ons $2 \times 2 = 4$ keuzes. En voor elk van die keuzes is er precies één oplossing. Als je er een kiest, is dan namelijk nog één rij en één kolom die een zwart vakje mist. Het vakje in die rij en kolom moet dus zwart worden en de rest blijft wit, dit is uitgewerkt in de tekeningen in figuur 2.



Figuur 2.

Het antwoord is dus D) 5.

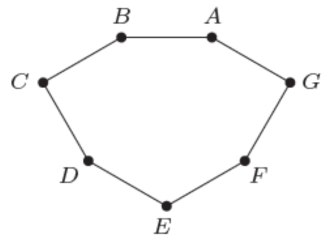
A2. (uit de eerste ronde 2011)

Vandaag is het 4 februari 2011. Deze datum wordt genoteerd als 04-02-2011. We kijken in deze opgave naar de eerstvolgende dag waarvan de datum met acht verschillende cijfers wordt geschreven. In welke maand valt die dag?

A) januari B) maart C) juni D) oktober E) december

A3. (uit de eerste ronde 2011)

Gegeven is zevenhoek ABCDEFG, waarvan alle zijden lengte 2 hebben.
Bovendien geldt: $\angle E = 120^\circ$, $\angle C = \angle G = 90^\circ$ en $\angle A = \angle B = \angle D = \angle F$.
Wat is de oppervlakte van de zevenhoek?

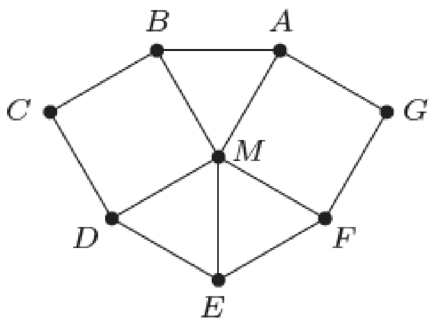


A) $10 + 2\sqrt{2}$ B) $8 + 3\sqrt{3}$ C) 14 D) $10 + 2\sqrt{6}$ E) $8 + 3\sqrt{6}$

A2. Ook voor deze vraag is geen lastige wiskunde nodig. Het is belangrijk om vanuit de al bekende gegevens, de ontbrekende te vinden, doe dit in stappen. Het gaat hier om een later datum, het jaartal van de gezochte datum begint dus met een cijfer dat 2 of hoger is. We zoeken nu de eerstvolgende datum waarvan het jaartal met een 2 begint en alle acht de cijfers verschillend zijn.
We strepen eerst de maanden af die zeker niet kunnen. Voor de cijfers van de maand vallen 11 (twee dezelfde cijfers) en 12 (cijfer 2 is al gebruikt in het jaartal) af. De maand (01 t/m 10) bevat dus het cijfer 0. De dagen beginnen met de cijfers 1, 2 of 3, maar 2 is al gebruikt, de dag begint daarom of met een 1 of een 3. In het tweede geval is het de 31e, want de 0 is al bezet. In beide gevallen zit de 1 dus in de dag. Nu de 0 en 1 al bezet zijn, is het kleinst mogelijke jaartal 2345. De kleinst mogelijke maand die dan nog gekozen kan worden is 06, oftewel juni, met als dag de 17e. In de laatste stap controleren we of het antwoord voldoet aan de eisen. De gevonden datum 17-06-2345 wordt inderdaad met acht verschillende cijfers wordt geschreven.

Het antwoord is dus C) juni.

A3. De vraag is ontzettend simpel als je begrijpt hoe je moet beginnen. Probeer altijd de vragen gestructureerd aan te pakken. Dit betreft meetkunde, kunnen we dan zomaar met zo'n figuur aan de slag gaan? Nee, we kunnen deze alleen uitrekenen door te werken met vierkanten, driehoeken, trapezia, cirkels, etc. De zevenhoek kan worden opgedeeld in twee vierkanten en drie gelijkzijdige driehoeken, allemaal met zijden van lengte 2. Zie figuur 3. We weten dat de oppervlakte van zo'n vierkant gelijk is aan $2 \times 2 = 4$. Met Pythagoras berekenen we de hoogte van driehoek ABM volgens $AP^2 + PM^2 = AM^2$ met $AP = \frac{1}{2}AB$ en we vinden dan $\sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$. De oppervlakte van de driehoek is dan $\frac{1}{2} * 2 * \sqrt{3} = \sqrt{3}$. De totale oppervlakte van de zevenhoek is dus $2 * 4 + 3 * \sqrt{3} = 8 + 3\sqrt{3}$.



Figuur 3.

Het antwoord is dus B) $8 + 3\sqrt{3}$.

Een meetkundige vraag in de Wiskunde Olympiade vereist vrijwel altijd het gebruik van Pythagoras. Als je dit in je achterhoofd houdt, zal het een stuk makkelijker worden!

A4. (uit de eerste ronde 2011)

Aline, Bram en Cas doen mee aan een wiskundewedstrijd met 12 vragen. Vooraf zijn ze enigszins pessimistisch en doen ze de volgende uitspraken.

> Aline: "Bram zal minstens twee vragen meer goed hebben dan ik."
> Bram: "Ik zal niet meer dan vijf vragen goed hebben."
> Cas: "Ik zal hoogstens zoveel vragen goed hebben als Aline."

Hun leraar probeert hun moed in te spreken en zegt: "Samen hebben jullie vast meer dan 18 vragen goed." Na afloop blijken zowel alle drie de leerlingen als hun leraar een foute voorspelling te hebben gedaan. Wie heeft/hebben het kleinste aantal vragen goed beantwoord?

A) alleen Aline B) alleen Bram C) alleen Cas
D) zowel Aline als Bram E) dat kun je niet met zekerheid zeggen

---

A5. (uit de eerste ronde 2011)

Van de getallen 1 tot en met 100 wil Jaap er zoveel mogelijk (verschillende) op een blaadje papier schrijven. Er mogen geen twee getallen op het blaadje komen die bij elkaar opgeteld 125 zijn. Hoeveel getallen kan hij hoogstens op het blaadje schrijven?

A) 50 B) 61 C) 62 D) 63 E) 64

A4. Probeer hier netjes te werken, bekijk elk gegeven een voor een en geef voor jezelf aan welke opties wel of niet mogelijk zijn. Aangezien de voorspelling van Bram fout was, heeft Bram minstens zes vragen goed, immers heeft hij meer dan vijf vragen goed. De voorspelling van Aline was ook fout, zodat Bram hoogstens één vraag meer goed heeft dan Aline. Daardoor heeft Aline dus minstens vijf vragen goed. Omdat de voorspelling van Cas fout was, heeft hij meer vragen goed dan Aline, dat er zijn dus minstens zes. Aline kan niet meer dan vijf vragen goed hebben. Want dan zou Cas minstens zeven vragen goed hebben en zijn er in totaal minstens $6 + 6 + 7 = 19$ vragen goed, welke niet zo kan zijn, omdat de docent een verkeerde voorspelling deed. Aline heeft dus vijf vragen goed. Omdat de andere twee minstens zes vragen goed hebben, heeft Aline het kleinste aantal vragen goed.

Het antwoord is dus A) alleen Aline.

A5. Deze vraag is eigenlijk heel simpel, wat je wilt is getallen opschrijven die niet samen met een al opgeschreven getal opgeteld 125 geeft. Hierbij zullen na het getal 24 paren ontstaan, als je alle getallen zou opschrijven, want $25 + 100 = 125$, $26 + 99 = 125$, $27 + 98 = 125$ enz. Het laatste paar zou zijn $62 + 63 = 125$. Wat je nu doet is het kiezen van één getal van elk paar, de andere kan dan niet meer, dat zou immers opgeteld 125 geven! De getallen 25 tot en met 100 geven samen 38 paren (ga dit na! 25 t/m 62), van elk paar moet je één getal missen. Daar komt bij dat de getallen 1 tot en met 24 geen paren kunnen vormen. Dit geeft dus uiteindelijk $24 + 38 = 62$ getallen die Jaap op kan schrijven. Meer dan 62 getallen kan Jaap niet opschrijven. Je zou ook nog kunnen redeneren dat er 100 getallen zijn, waarvan 38 paren, daarvan mis je in elk paar één getal. In totaal kan hij daarom niet meer dan $100 - 38 = 62$ getallen opschrijven.

Het antwoord is dus C) 62.

A6. (uit de eerste ronde 2011)

Het getal $a = 11 \cdots 111$ bestaat uit precies 2011 enen.
Wat is de rest van a bij deling door 37?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 7 E) 11

A6. Deze vraag is wat lastiger en vereist wat meer inzicht. Toch kun je aan de hand van 'deling' en 'rest' redeneren dat je iets kan doen met staartdelingen. Hopelijk snap je ook dat je bij een vraag als deze niet echt 2011 enen op gaat schrijven en probeert te delen. Deze vraag moet je dus 'in het klein' oplossen. Misschien valt al gauw op dat 111 deelbaar is door 37. Dat feit gaan we gebruiken. Daaruit volgt vanzelfsprekend dat het getal 1110 • • • 0 deelbaar is door 37, ongeacht het aantal nullen aan het eind. Nu komt een lastig stuk.

We hebben het hier over 2011 cijfers achter elkaar. En 111 is deelbaar door 37.
3 enen en 2008 nullen zijn samen 2011 cijfers.
1110 • • • 0 (3 enen, 2008 nullen)

Daar tel je bij op:
3 enen en 2005 nullen. Let goed op! Nu zijn we dus 3 plaatsen verschoven als het ware!
1110 • • • 0 (3 enen, 2005 nullen)

Voor degenen die het moeilijk vinden:
we hebben nu dus 1111110 • • • 0 (in totaal 2011 cijfers)

Van de 3 enen en 2008 nullen	Van de 3 enen en 2005 nullen

Je telt dus steeds een cijfer op beginnend met 3 enen en 3 nullen minder, zodat je als het ware steeds 3 cijfers opschuift...

Je telt vervolgens op 1110 • • • 0 (2002 nullen), en zo verder tot 1110 (1 nul). De som van deze getallen is 1 • • • 10 (2010 enen en 1 nul) en is dus ook deelbaar door 37. De rest van a = 11 • • • 111 bij deling door 37 is dus gelijk aan 1, want a – 1 = 1 • • • 10 (2010 enen en 1 nul) en dat is deelbaar door 37.

Het antwoord is dus B) 1.

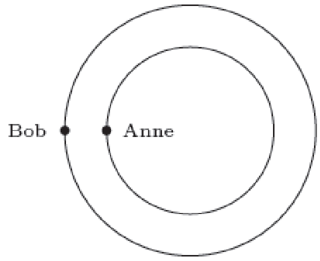
Laat je niet misleiden, de korte vragen zijn meestal de vragen die wat meer eigen inzicht vereisen!

Een gouden tip: de aanpak wordt vaak verraden in de vraagstelling! 'Deling' en 'rest' heeft geholpen met het beginnen aan deze vraag.

Zulke vragen komen erg vaak voor, het is belangrijk dat je jezelf aanleert om op deze methode de vraag op te lossen. Weliswaar had je deze vraag vast ook op kunnen lossen door maar wat te proberen en uit te schrijven, maar door een methodische aanpak als deze bereid je jezelf al voor op de lastigere vragen in latere rondes.

A7. (uit de eerste ronde 2011)

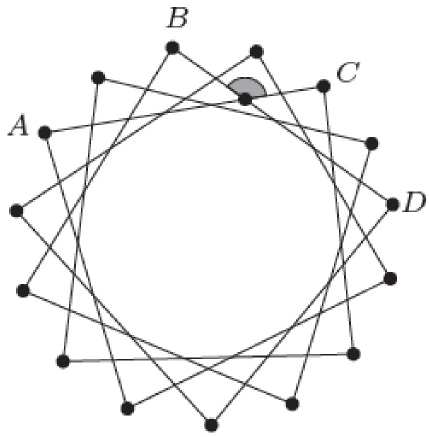
Anne en Bob zitten in een kermisattractie. Ze bewegen in cirkels rond hetzelfde middelpunt en in dezelfde richting. Anne gaat één keer per 20 seconden rond, Bob één keer per 28 seconden. Op een gegeven moment zijn ze op de kleinst mogelijke afstand van elkaar (zie de tekening).
Hoeveel seconden duurt het daarna voordat Anne en Bob juist zo ver mogelijk van elkaar verwijderd zijn?



A) 22,5 B) 35 C) 40 D) 49 E) 70

A8. (uit de eerste ronde 2011)

De hoekpunten van een regelmatige vijftienhoek worden verbonden zoals in het plaatje. (Pas op: de afmetingen in het plaatje kloppen niet precies!)
Hoe groot is de hoek, aangegeven met een boogje, tussen AC en BD?

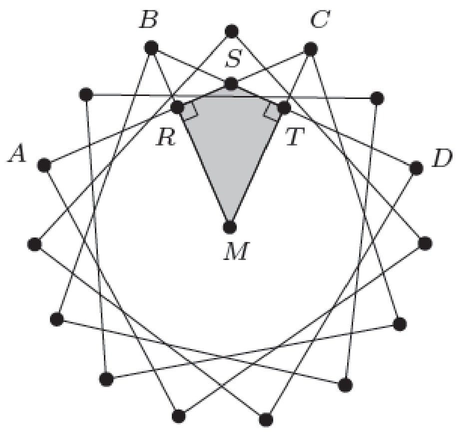


A) 130 ° B) 132° C) 135° D) 136° E) 137,5°

A7. Misschien probeerde je de vraag op te lossen door gewoon tijden uit te schrijven op verschillende plaatsen en dan door toeval het juiste antwoord vinden. Dit is echter niet de meest veilige manier, en uiteraard ook niet de meest wiskundige. Laten we eerst berekenen na hoeveel seconden ze weer op de kleinst mogelijk afstand van elkaar vandaan zijn. Dit is het geval na 140 seconden, dan heeft Anne 7 rondjes afgelegd ($\frac{140}{20} = 7$) en Bob 5 ($\frac{140}{28} = 5$). De voorsprong van Anne is op dat moment twee hele rondjes. Na $\frac{140}{4} = 35$ seconden loopt Anne een half rondje voor (twee rondes voorsprong delen door 4). Dat is precies de eerste keer dat zij zo ver mogelijk van Bob verwijderd is.

Het antwoord is dus B) 35.

A8. Dit is een echte meetkunde vraag, Pythagoras hoef je nu niet gebruiken, je moet immers geen zijde, omtrek of oppervlak te berekenen. We kiezen eerst een middelpunt, noem het middelpunt van de vijftienhoek M en het snijpunt van AC en BD punt S, zie figuur 4. In vierhoek MRST zien we al gauw door middelloodlijnen MB en MC dat ∠MRS = 90° en ∠STM = 90°. Omdat alle hoeken van de vijftienhoek samen 360° zijn, zien we dat ∠TMR = $\frac{2}{15} * 360° = 48°$. De som van de hoeken van een vierhoek is 360°, in vierhoek MRST geldt daarom: ∠RST $= 360° - 2 * 90° - 48° = 132°$. Denk weer aan de definities in de meetkunde, ∠RST en ∠BSC zijn overstaande hoeken, dus ∠RST = ∠BSC = 132°. De gevraagde hoek is dus ook 132°.



Figuur 4.

Het antwoord is dus B) 132°.

Zorg ervoor dat je de basis definities kent van meetkunde. Indien je school gebruik maakt van de methode 'getal & ruimte', raad ik je aan om hoofdstuk 8 in 'vwo B deel 2' door te nemen. Hoofdstuk 12 is voor de Wiskunde Olympiade minder van belang.

B-vragen | Eerste en tweede ronde

B1. (uit de eerste ronde 2011, 5 punten)

Voor het getal x geldt: $x = \frac{1}{1+x}$. Bereken $x - \frac{1}{x}$. Vereenvoudig je antwoord zo ver mogelijk.

B2. (uit de eerste ronde 2011, 5 punten)

In een warenhuis loopt een roltrap van de begane grond naar de eerste verdieping. Dion gaat met deze roltrap omhoog; hij zet hierbij zelf ook nog een aantal stappen in een vast tempo. Raymond loopt over dezelfde roltrap, tegen de richting in, van boven naar beneden en zet hierbij stappen in hetzelfde tempo als Dion. Ze nemen allebei één trede per stap. Dion is na precies 12 stappen boven; Raymond is na precies 60 stappen beneden. Hoeveel stappen zou Dion nodig hebben om boven te komen als de roltrap stilstond?

B1. Dit is weer een korte vraag, we moeten dus goed gebruik maken van elk gegeven, bovendien mogen de regels van algebra hier niet vergeten worden! Gegeven is dat $x = \frac{1}{1+x}$. Hopelijk merk je al gauw dat $x \neq 0$, want $0 \neq \frac{1}{1}$. Vanaf hier kunnen we niet veel, we gaan de breuk dus links en rechts omkeren. Dit geeft $\frac{1}{x} = 1 + x$. Mocht je dat niet begrijpen, wat we hier gedaan hebben is als volgt: $A = \frac{B}{C}$ wordt $C = \frac{B}{A}$, nog anders gezegd hebben we dus 'links' en 'rechtsonder' met elkaar 'omgewisseld'. Hieruit volgt $x - \frac{1}{x} = -1$ (simpelweg overbrengen naar de andere kant van het =-teken).

In stappen:

$$x = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{x} = 1 + x$$

$1 + x = \frac{1}{x}$ (niets bijzonders, alleen de kanten omgedraaid voor de duidelijkheid)

$$1 + x - \frac{1}{x} = 0$$

$$x - \frac{1}{x} = -1$$

Het antwoord is dus – 1.

B2. De vraag lijkt moeilijk omdat je een antwoord moet krijgen uit twee verschillende gebeurtenissen. Pak het overzichtelijk aan, we lossen de vraag net iets anders op. We stellen dat drie personen, Dion, Raymond en laten we zeggen Mark, alledrie op de begane grond staan en we bekijken in gedachten drie roltrappen naast elkaar: Dion neemt de eerste en gaat met de richting mee omhoog, de tweede staat stil en de derde neemt Raymond ook omhoog, maar deze roltrap gaat naar beneden. We hebben in feite het verhaaltje van Raymond net iets aangepast zodat de personen op dezelfde plek beginnen. Dion die de eerste trap omhoog neemt, is na 12 stappen boven. Raymond, die omhoog gaat op de derde trap doet er 60 stappen over en is na 12 stappen dus pas op $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$. Als een derde persoon Mark, de middelste trap neemt met hetzelfde tempo, zit hij na 12 stappen precies tussen Dion en Raymond in, immers de trap gaat niet naar boven en niet naar beneden. Hij zou zich dan bevinden op $\left(\frac{5}{5} + \frac{1}{5}\right) / 2 = \frac{3}{5}$ van de trap.
Hij heeft dus $\frac{5}{3} * 12 = 20$ stappen nodig om boven te komen. En natuurlijk is Mark dan hetzelfde als Dion die loopt over de stilstaande roltrap.

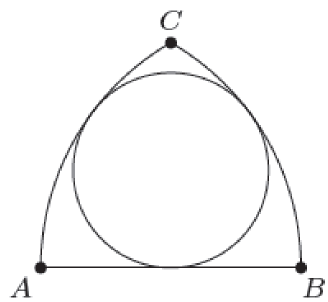
Het antwoord is dus 20.

B3. (uit de eerste ronde 2011, 5 punten)

Zes padvinders gaan op speurtocht. Op zaterdag gaan ze naar het bos en op zondag gaan ze de bergen in. Op beide dagen moeten ze in tweetallen hun weg vinden. Hun leider wil ze voor elk van beide tochten in paren verdelen, zó dat niemand op de tweede dag dezelfde partner heeft als op de eerste dag. Op hoeveel manieren kan hij dat doen?

B4. (uit de eerste ronde 2011, 5 punten)

In de figuur zie je een 'spitsboog' ABC en zijn ingeschreven cirkel. De spitsboog bestaat uit lijnstuk AB met lengte 1, cirkelboog BC met middelpunt A en cirkelboog AC met middelpunt B.
Hoe groot is de straal van de ingeschreven cirkel van de spitsboog?



B3. Deze vraag zou wat makkelijker kunnen zijn als je wiskunde D in je vakkanpakket hebt opgenomen. Desalniettemin, hoeft deze vraag absoluut niet moeilijk te zijn met een slimme aanpak. Ten eerste filteren we de irrelevante gegevens eruit. De vraag is om vijf padvinders A, B, C, D, E en F te verdelen in paren over twee dagen, waarbij niemand twee keer bij dezelfde partner zit. We verdelen de paren gewoon een voor een, te beginnen met padvinder A. Voor hem zijn er 5 mogelijkheden om een partner B te vinden voor de eerste dag. Omdat B niet opnieuw met A mag gaan, zijn er vervolgens 4 mogelijke partners C voor B op de tweede dag. Voor C zijn er nog 3 mogelijke partners D voor de eerste dag, hij mag immers niet met B gaan, en A is ook al ingedeeld met B voor deze dag. Voor D zijn er daarna nog 2 mogelijke partners E voor de tweede dag, B en C zijn al bezet en let erop dat A zijn partner niet kan zijn omdat er dan twee padvinders overblijven die op beide dagen een paar vormen. Ten slotte blijft er dan nog padvinder F over die geen keuze heeft en op de eerste dag met E meegaat en op de tweede dag met A. Als je deze mogelijkheden nu samen neemt geeft dat dus $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ mogelijkheden. Let erop dat je ze niet bij elkaar optelt, je vermenigvuldigt ze omdat bijvoorbeeld elk van die 5 eerste mogelijkheden ook weer ieder 4 mogelijkheden hebben enz.

Het antwoord is dus 120.

B4. Probeer bij een lastige meetkunde als deze eerst alles op te schrijven wat er eigenlijk al gegeven is en de dingen die je ervan kunt afleiden. We kijken eerst naar de ingeschreven cirkel. Het middelpunt van deze cirkele noemen we middelpunt O en de lengte van zijn straal noemen we r. De cirkel raakt lijnstuk AB, dit raakpunt aan AB noemen we M en het raakpunt van de cirkel aan boog BC noemen we R, zie figuur 5. De drie punten A, O en R liggen op een lijn, zodat we kunnen zeggen dat $|AO| = |AR| - |OR| = 1 - r$. Dit doen we omdat de lengte AR bekend is en we de lengte OR een naam hebben gegeven. De absoluutstrepen zijn niet per se nodig, maar die gebruiken we omdat de lengtes niet negatief kunnen zijn. Verder geldt $|OM| = r$ en $|AM| = ½|AB| = ½$. Nu kan je de stelling van Pythagoras gebruiken voor driehoek AOM, dit geeft:

$$|AM|^2 + |OM|^2 = |AO|^2$$

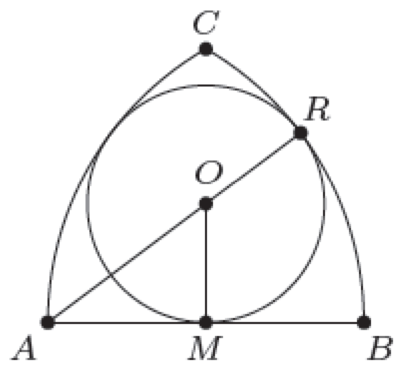
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + r^2 = (1-r)^2$$

$$\frac{1}{4} + r^2 = (1-r)^2 = r^2 - 2r + 1$$

$\frac{1}{4} = -2r + 1$ (haal r^2 aan beide kanten weg)

$2r = 1 - \frac{1}{4}$

$2r = \frac{3}{4}$ en daaruit volgt dat $r = \frac{3}{8}$



Figuur 5.

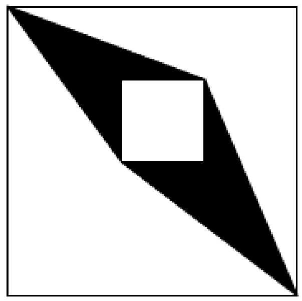
Het antwoord is dus $\frac{3}{8}$.

B1. (uit de tweede ronde 2011, 4 punten)

Bij een gala zijn er verschillende man-vrouw-koppels aan het dansen, en wel zo dat $\frac{2}{3}$ deel van de aanwezige vrouwen aan het dansen is met $\frac{3}{5}$ deel van de aanwezige mannen. Welk deel van de aanwezigen is aan het dansen?

B2. (uit de tweede ronde 2011, 4 punten)

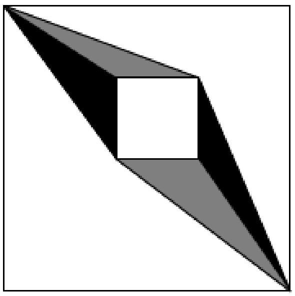
Een vierkant met zijde 2 ligt binnen een vierkant met zijde 7. De zijden van het kleine vierkant zijn evenwijdig aan de zijden van het grote vierkant. Wat is de oppervlakte van het zwarte gebied?



B1. We noemen het aantal aanwezige vrouwen v en het aantal aanwezige mannen m. Omdat een 1 vrouw met 1 man danst, krijgen we dat $\frac{2}{3}v = \frac{3}{5}m$, waaruit volgt dat $v = \frac{9}{10}m$. Dit geldt natuurlijk voor het aantal aanwezigen! Omdat elk dansend koppel dus uit twee mensen bestaat, is het aantal mensen dat aan het dansen is dan natuurlijk precies twee keer het aantal mannen dat aan het dansen is, dus $2 * \frac{3}{5}m = \frac{6}{5}m$.
Het totaal aantal aanwezige mensen is $m + v = m + \frac{9}{10}m = \frac{19}{10}m$. Nu kunnen we heel simpel het deel van de aanwezigen dat aan het dansen is bereken, dit deel is gelijk aan $\frac{\frac{6}{5}m}{\frac{19}{10}m}m = \frac{6}{5} * \frac{10}{19} = \frac{12}{19}$.

Het antwoord is dus $\frac{12}{19}$.

B2. Zoals als eerder is gezegd, moet je een figuur kunnen opdelen in vormen waarmee je kan werken. In dit geval splitsen we het zwarte gebied uit de opgave op in vier driehoekjes, waarvan er twee grijs zijn gemaakt, zie figuur 6. Omdat we hier geen driehoeken krijgen met een rechte hoek, kunnen we geen gebruik maken van de stelling van Pythagoras. De basis van de twee grijze driehoekjes hebben beide een lengte 2 en bij elkaar samen een hoogte $7 - 2 = 5$, we hebben hier dus de hoogte van het grote vierkant minus de hoogte van het kleine vierkantje genomen. De oppervlakte van de twee grijze driehoekjes samen is dus $\frac{1}{2} * hoogte * breedte = \frac{1}{2} * 5 * 2 = 5$. Als je de manier van aanpakken goed hebt gevolg, zal je vast hebben gezien dat ook precies hetzelfde geldt voor de twee zwarte driehoekjes (ze zijn alleen 'omgekeerd'. De totale oppervlakte van het in de opgave genoemde zwarte gebied (hier dus grijs en zwart) is dus simpelweg 5 + 5 = 10.



Figuur 6.

Het antwoord is dus 10.

B3. (uit de tweede ronde 2011, 4 punten)

In een klas zitten 23 leerlingen die elk precies één vreemde taal hebben gekozen, namelijk Duits of Frans. Er zitten in totaal 10 meisjes in de klas, en er zijn in totaal 11 leerlingen die Frans doen. Het aantal meisjes dat Frans heeft gekozen plus het aantal jongens dat Duits heeft gekozen, is 16.
Hoeveel meisjes hebben Frans gekozen?

B4. (uit de tweede ronde 2011, 4 punten)

We hebben 10.000 kaarten genummerd van 1 tot en met 10.000. We doen steeds de volgende stap: we halen alle kaarten weg waarop een kwadraat staat en we hernummeren de overgebleven kaarten weer opeenvolgend vanaf 1.
Na hoeveel stappen hebben we nog maar één kaart over?

B3. Zoals gegeven in de opdracht zijn er in totaal zijn er 23 leerlingen. Nu kunnen we gewoon simpelweg alle verschillende gegevens met elkaar verbinden.

16 + 11 + 10

= (meisjes met Frans + jongens met Duits) + iedereen met Frans + alle meisjes

= (meisjes met Frans + jongens met Duits) + (meisjes met Frans + jongens met Frans) + (meisjes met Frans + meisjes met Duits)
In deze stap hebben we de dingen van de vorige stap uitgebreider genoteerd.

= 3 × meisjes met Frans + jongens met Duits + jongens met Frans + meisjes met Duits
Nu hebben we de drie keren 'meisjes met Frans' samengenomen en het wat overzichtelijker genoteerd.

= 2 × meisjes met Frans + 23
Meisjes met Frans en Duits en jongens met Frans en Duits vormen samen de gehele klas van 23 leerlingen. Er blijft 2 keer 'meisjes met Frans' over.

Dit geeft 16 + 11 + 10 – 23 = 2 × meisjes met Frans

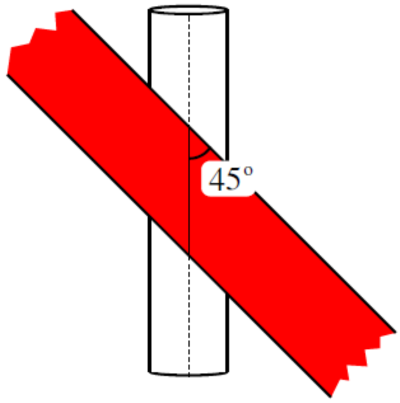
Het aantal meisjes met Frans is dus gelijk aan $\frac{16+11+10-23}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

Het antwoord is dus 7.

B4. Deze vraag eist wat wiskundig inzicht, we lossen hem gewoon in stappen op! De eerste keer halen we de kaarten genummerd $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 100^2$ weg. Let erop dat je moet stoppen bij 100^2, omdat dit kaart nummer 10.000 is! Er blijven dan nog 10.000 − 100 = 9900 kaarten over. Omdat $99^2 \leq 9900 < 1002$, halen we logischerwijs in de tweede stap $1^2, 2^2, \ldots, 99^2$ weg. Daarna zijn er dus nog 9900 - 99 = 9801 = 99^2 kaarten over, dit aantal is precies een kwadraat! We kunnen natuurlijk niet op deze manier door blijven gaan, gelukkig hebben we nu wel een algemene trend gevonden. in het algemeen geldt dat als we beginnen met n^2 kaarten, waarbij $n \geq 2$, we in de eerste stap n kaarten weghalen en er $n^2 - n$ kaarten overblijven. Omdat $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 \leq n^2 - n < n^2$, halen we vervolgens in de volgende stap $n - 1$ kaarten weg, waarna er precies $(n^2 - n) - (n-1) = (n-1)^2$ kaarten overblijven. In twee stappen zijn we dus van n^2 kaarten naar $(n-1)^2$ kaarten gegaan. Als we nu weer teruggaan naar onze vraag, hebben we dus $2 * 99 = 198$ stappen nodig om van 100^2 kaarten naar 1 kaart te gaan.

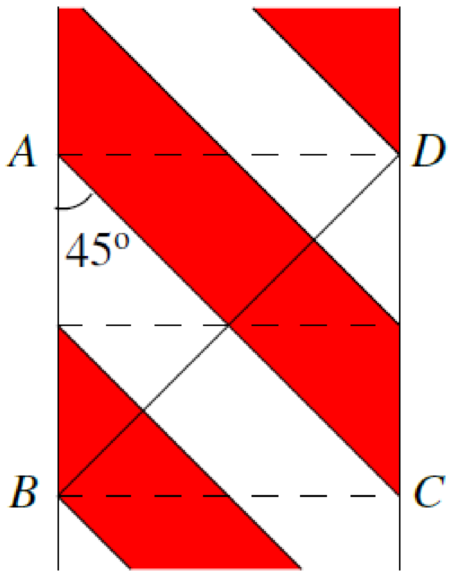
Het antwoord is dus 198.

B5. (uit de tweede ronde 2011, 4 punten)



We houden een rood lint onder een hoek van 45 graden over een cilindervormige witte stok (zie figuur). Het lint wordt dan strak om de stok gewikkeld (zonder plooien), zodat we een rode spiraal om de stok krijgen. Tussen de rode spiraal loopt een witte spiraal; dat is het deel van de stok dat niet door het lint wordt afgedekt. De straal van de stok is 2 cm.
Het blijkt dat de witte en de rode spiraal even breed zijn. Wat is de breedte van het lint?

B5. We maken handig gebruik van het feit dat de stok een cilinder is. We 'knippen' deze in gedachten in de lengte open en rollen hem uit zodat het een rechthoekige strook ABCD wordt. Je moet weten dat de punten A en D horen bij hetzelfde punt op de cilinder, net als punt B en C. Ook weet je dat de breedte van de strook is gelijk aan de omtrek van de cilinder, dus $|AD| = |BC| = 2\pi r = 2\pi * 2\ cm = 4\pi\ cm$. Zie figuur 7.
Verder weet je dat vanwege het feit dat het rode lint een hoek van 45° maakt met de kniplijn, ABCD een vierkant is. De lengte van de diagonaal BD kan je nu berekenen door middel van de stelling van Pythagoras.
$AB^2 + AD^2 = BD^2$ geeft $BD = \sqrt{(4\pi)^2 + (4\pi)^2} = \sqrt{16\pi^2 + 16\pi^2} = \sqrt{32\pi^2} = \sqrt{2} * 4\pi\ cm$ en omdat de witte en rode banen even breed zijn, is deze lengte ook gelijk aan viermaal de breedte van het rode lint (getekend in figuur 7). Het rode lint is dus $\frac{4\pi\sqrt{2}}{4} = \pi\sqrt{2}$ cm breed.



Figuur 7.

Het antwoord is dus $\pi\sqrt{2}$ cm.

Weet je het nog?

Omtrek cirkel = $2\pi r$ (= πd)

Oppervlakte cirkel = πr^2

Dit geldt ook voor een cilinder, let er wel op dat je de juiste omtrek of het juiste vlak neemt!

C-vragen | Tweede ronde

C1. (uit de tweede ronde 2011, 10 punten)

Bepaal alle drietallen (a, b, c) van positieve gehele getallen met de volgende eigenschappen:

- er geldt $a < b < c$ en a, b en c zijn drie opeenvolgende oneven getallen;
- het getal $a^2 + b^2 + c^2$ bestaat uit vier gelijke cijfers.

C1. Probeer jezelf aan te leren dat je bij de steeds moeilijkere vragen die je krijgt, niet langer te werken met getallen, vaak omdat dit niet mogelijk is of omdat het absurd veel schrijfwerk zou opleveren. Werk met algemene formules, meestal ook de enige manier om een dergelijke vraag op te kunnen lossen.
We kijken naar de eerste eigenschap. Omdat a, b en c opeenvolgende positieve oneven getallen zijn, kunnen we schrijven: $a = 2n - 1$, $b = 2n + 1$ en $c = 2n + 3$, met n een positief geheel getal. Let erop dat we $2n$ gebruiken in plaats van n omdat $2n$ altijd een even getal geeft. Invullen bij de tweede gegeven eigenschap geeft:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2$$
$$= (4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9)$$
$$= 12n^2 + 12n + 11.$$

$12n^2 + 12n + 11$ moet gelijk zijn aan een getal dat bestaat uit vier gelijke cijfers p. Het getal $12n^2 + 12n$ bestaat dus uit vier cijfers waarvan de eerste twee p zijn en de laatste twee $p - 1$. Omdat $12n^2 + 12n$ deelbaar is door 2, moet $p - 1$ een even getal zijn. Dat geeft voor $12n^2 + 12n$ de mogelijkheden 1100, 3322, 5544, 7766 en 9988. We weten ook dat het deelbaar moet zijn door 3, waardoor alleen nog 5544 overblijft.
We hebben nu gevonden dat $12n^2 + 12n = 5544$, dus $n^2 + n = \frac{5544}{12} = 462$. Dit kunnen we herschrijven als $n^2 + n - 462 = 0$. Dit is heel mooi, omdat het een kwadratische vergelijking is, die we kunnen ontbinden: $(n - 21)(n + 22) = 0$. Omdat n een positief geheel getal moet zijn, is de enige oplossing die voldoet $n = 21$. Hiermee kunnen we dan het enige drietal berekenen dat voldoet als beide eigenschappen: (a, b, c) = (41, 43, 45).

C2. (uit de tweede ronde 2011, 10 punten)

Dertig scholieren doen mee aan een wiskundewedstrijd met zestien vragen. Bij elke vraag moeten ze een getal als antwoord geven. Voor elke vraag die een scholier binnen een minuut goed beantwoordt, krijgt hij 10 punten. Voor elke vraag die hij goed beantwoordt, maar niet binnen een minuut, krijgt hij 5 punten. Voor elke vraag die hij fout beantwoordt, krijgt hij 0 punten.
Na afloop van de wedstrijd blijkt dat van alle 480 antwoorden meer dan de helft goed is en binnen een minuut gegeven. Het aantal antwoorden dat goed is, maar niet binnen een minuut gegeven, blijkt gelijk te zijn aan het aantal foute antwoorden.
Laat zien dat er twee scholieren zijn die precies dezelfde totaalscore hebben gehaald.

C2. Je ziet gelijk dat alle mogelijke scores veelvouden zijn van 5. De laagste score die een scholier kan halen is 0 en de hoogste score is $16 * 10 = 160$. Stel nu eens dat er geen twee scholieren zijn met dezelfde score. Dan is de gezamenlijke score van de scholieren niet meer dan $160 + 155 + 150 + \bullet\bullet\bullet + 15 = \frac{1}{2} * 175 * 30 = 2625$. Nu dit bekend is, gaan we hieruit een tegenspraak afleiden.
Het aantal antwoorden dat goed is en ook binnen een minuut gegeven, noemen we A. Het aantal antwoorden dat goed is, maar niet binnen een minuut gegeven, noemen we B. Ten slotte noemen we het aantal foute antwoorden C. Er is gegeven dat de scholieren samen $16 * 30 = 480$ vragen hebben beantwoord, dus A + B + C = 480. Ook weten we dat meer dan de helft van de vragen binnen een minuut goed beantwoord is, dus A > 240. Verder is gegeven dat B = C, zodat $B = C = \frac{480-A}{2}$. We kunnen nu de gezamenlijke score van de scholieren uitdrukken in A. Deze is:
$10 * A + 5 * B + 0 * C = 10 * A + 5 * \frac{480-A}{2} = \frac{15}{2}A + 1200$.
Omdat A > 240, is de gezamenlijke score van de scholieren groter dan $\frac{15}{2} * 240 + 1200 = 3000$. Maar uit de aanname aan het begin dat alle scores verschillend zijn, hadden we afgeleid dat de gezamenlijke score hoogstens 2625 is, welke een tegenspraak is op wat we net hebben gekregen. We concluderen hiermee dat de aanname fout was en er dus wel twee scholieren zijn met precies dezelfde score.

1. (uit de finale 2011, 10 punten)

Bepaal alle drietallen positieve gehele getallen (a, b, n) waarvoor geldt dat

$$a! + b! = 2^n$$

$Notatie$: $k! = 1 \times 2 \times \bullet \bullet \bullet \times k$, dus bijvoorbeeld $1! = 1$ en $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

1. Je kan zien dat a en b dezelfde rol spelen in de vergelijking $a! + b! = 2^n$, daarom nemen we voor het gemak aan dat $a \leq b$. De oplossingen met $a > b$ vinden we dan gewoon door a en b te verwisselen, dat kan omdat deze twee gevallen dezelfde rol hebben. Het maakt dus niet uit welke we bekijken, we bekijken nu de mogelijkheden voor a. Hierbij zijn drie gevallen mogelijk.

Geval $a \geq 3$: De aanname die we eerder hebben genomen geeft $3 \leq a \leq b$, waardoor $a!$ en $b!$ deelbaar zijn door 3, zodat ook $a! + b!$ deelbaar is door 3. Omdat 2^n voor geen enkele waarde van n deelbaar is door 3, zijn er geen oplossingen.

Geval $a = 1$: De formule kan je nu zo schrijven dat voor b moet gelden dat $b! = 2^n - a! = 2^n - 1$. Omdat 2^n even is vanwege $n \geq 1$, moet $b!$ dan oneven zijn. Omdat $b!$ deelbaar is door 2 voor alle $b \geq 2$, blijft alleen $b = 1$ over. We vinden $1! = 2^n - 1$, zodat $n = 1$. De enige oplossing is dus $(a, b, n) = (1, 1, 1)$.

Geval $a = 2$: Voor $b \geq 4$ zijn er geen oplossingen. Immers, omdat $b!$ dan deelbaar is door 4, mag $2^n = b! + 2$ geen viervoud zijn, zodat $2^n = 2$ de enige mogelijkheid is. Dit is echter in strijd met het feit dat $2^n = b! + 2 \geq 24 + 2$.
Voor $b = 2$ vinden we $2^n = 2 + 2 = 4$. Waaruit volgt dat $n = 2$ en $(a, b, n) = (2, 2, 2)$ de enige oplossing is.
Voor $b = 3$ vinden we $2^n = 2 + 6 = 8$. Waaruit volgt dat $n = 3$ en $(a, b, n) = (2, 3, 3)$ de enige oplossing is.
We zijn we bezig geweest met de aanname dat $a \leq b$, door a en b van rol te wisselen vinden we ook de oplossingen met $a > b$, waarvan de oplossing $(a, b, n) = (3, 2, 3)$ is.

In totaal zijn er dus vier oplossingen: $(1, 1, 1), (2, 2, 2), (2, 3, 3)$ en $(3, 2, 3)$.

Conclusie en reflectie

Ik kijk tevreden terug op de opdracht, de manier waarop de opgaven zijn uitgewerkt zijn zoals ik het vooraf had gewild. Maar het was vooral een opdracht waar ik ontzettend veel van heb geleerd, zo ging ik op een gegeven moment de methodes volgen voor de lastigere opgaven die ik zelf heb bedacht voor de eerdere opgaven. De mooiste leermomenten vind ik zelf toch wel de momenten waarop ik niet uit de opgave kwam, deze dan bestudeerde met behulp van de officiele uitwerkingen, en dan door een zorgvuldige foutenanalyse steeds vaker in staat was om de opgaven die erna kwamen zelfstandig op te lossen. Ook nuttig vond ik het kunnen inbrengen van mijn eigen kennis, de dingen die ik tijdens de wiskunde B en D lessen heb geleerd, evenals de eigen ervaring van mijn eigen deelnames. Ik heb bijvoorbeeld vaak tips gegeven die ik zelf gebruikte.

Mijn streven was eerst om alle opgaven van meerdere jaren uit te werken, dit is helaas niet gelukt, de reden waarom het uitwerken van de opgaven zo ontzettend lang hebben geduurd (zie logboek), is omdat ik een opgave eerst zelf oplos, dan controleer en waarnodig verbeter of bijwerk, vervolgens houd ik een foutenanalyse, waarna de uitwerking van de opgave zelf, met alle extra uitgebreide stappen, extra uitleg en eventueel nog wat tips, volgt.

Ik ben blij met de keuze om deze opdracht te doen, meedoen aan de Wiskunde Olympiade heb ik altijd al als leuk ervaren, daarom was het zo interessant om me te hebben georiënteerd op de opgaven hiervan, niet alleen het leren van wiskunde die ik nog niet eerder was tegengekomen, maar ook het inbrengen van eigen kennis en het ontwikkelen van wiskundig inzicht, welke zelfs zichtbaar verbeterde naarmate ik mijn eigen opgaven in uitgewerkte stappen moest uitleggen!

Bronvermelding

1. http://nl.wikipedia.org/wiki/Internationale_Wiskunde_Olympiade

2. http://nl.wikipedia.org/wiki/Nederlandse_Wiskunde_Olympiade

3. http://www.wiskundeolympiade.nl/cms/meedoen/voor-wie-is-het