Op 29 januari vond de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Duizenden leerlingen hebben meegedaan en gestreden om een plaats bij de beste 750. Deze 750 mogen eind maart door naar de regionale tweede ronde die dit jaar voor het eerst op tien universiteiten wordt gehouden. In dit artikel bekijken we uitgebreid opgave B4 van deze eerste ronde.

■ door Sietske Tacoma

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

RODE EN GROENE GETALLEN

Opgave B4 (NWO eerste ronde 2010):
Op een bord met 28 rijen en 37 kolommen wordt in elk vakje met een rode pen een getal geschreven: in de bovenste rij van links naar rechts de getallen 1 tot en met 37, in de rij eronder van links naar rechts de getallen 38 tot en met 74, enzovoorts. Met een groene pen wordt daarna opnieuw in elk vakje een getal geschreven, maar nu komen de getallen 1 tot en met 28 van boven naar beneden in de linker kolom, in de kolom ernaast van boven naar beneden de getallen 29 tot en met 56, enzovoorts. In het vakje linksboven staat nu zowel in rood als in groen het getal 1. Tel de rode getallen op, van alle vakjes waar in rood en groen hetzelfde getal staat. Wat is de uitkomst?

Waar denk je als eerste aan bij deze opgave? In het vakje linksboven staat zowel in rood als groen een 1. Het vakje rechtsonder is voor zowel rood als groen het laatste vakje, dus daar staat ook in zowel rood als groen hetzelfde getal. Dit is het getal $28 \cdot 37 = 1036$. Om nu de gevraagde som te vinden, moeten we eerst bekijken of er nog andere vakjes zijn waarin in rood en groen hetzelfde getal staat. Daar gaan we nu naar op zoek.

Je zou daarvoor het hele rooster uit kunnen schrijven en kijken in welke vakjes twee keer hetzelfde getal staat. Dit is echter behoorlijk wat werk. Je moet dan in rood en in groen 1036 getallen opschrijven en daarbij ook nog eens geen foutjes maken. Daarom is het slimmer om eerst eens op een wat kleiner bord alles uit te schrijven.

EEN KLEINER PROBLEEM Laten we kijken wat er op een bord met drie rijen en vijf kolommen gebeurt. Op de foto op pagina 19 zien we drie vakjes waar twee keer hetzelfde getal in staat, namelijk het vakje linksboven, het vakje rechtsonder en het vakje precies in het midden. Het antwoord voor ons kleinere probleem is dus $1 + 8 + 15 = 24$.

We gaan eens kijken wat er precies met de rode en groene getallen gebeurt. Hopelijk brengt ons dat op een idee om het grote probleem aan te pakken. Als je in een willekeurig vakje begint en één vakje naar rechts gaat, dan wordt het rode getal 1 hoger en het groene getal 3 hoger. Ga je één vakje naar beneden, dan wordt het rode getal 5 hoger en het groene getal 1 hoger. Als we beginnen in een vakje waarin het rode getal en het groene getal gelijk zijn (zoals in het vakje linksboven) en dan twee vakjes naar rechts en één naar beneden gaan, dan wordt het rode getal $1 + 1 + 5 = 7$ hoger en het groene getal $3 + 3 + 1 = 7$ hoger en in dat vakje zijn de getallen dus weer gelijk aan elkaar.

Op de foto is te zien dat je alleen maar van een vakje met twee gelijke getallen naar een vakje met twee gelijke getallen kunt komen door twee vakjes naar rechts te gaan en één naar beneden, of door vier vakjes naar rechts te gaan en twee naar beneden. Deze tweede mogelijkheid is eigenlijk hetzelfde als twee keer de eerste mogelijkheid doen. We willen straks weten of voor het bord met 28 rijen en 37 kolommen net zoiets geldt. Daarom gaan we kijken of we het kleinere probleem ook in formulevorm op kunnen schrijven.

FORMULES VOOR HET KLEINE PROBLEEM
We zijn benieuwd wat er bij het rode getal opgeteld wordt als we een aantal vakjes naar rechts en een aantal vakjes naar beneden gaan. Dit getal, dat dus

bij het rode getal wordt opgeteld, noemen we V_{rood} (met de V van verschil). Het aantal vakjes dat we naar rechts gaan, noemen we x en het aantal vakjes dat we naar beneden gaan noemen we y. Voor elke stap naar rechts neemt V_{rood} met 1 toe en voor elke stap naar beneden neemt V_{rood} met 5 toe. Er geldt dus $V_{\text{rood}} = x + 5y$. Als we het getal dat bij het groene getal wordt opgeteld V_{groen} noemen, dan kunnen we op dezelfde manier vinden dat $V_{\text{groen}} = 3x + y$. Als we willen dat er bij het rode getal en bij het groene getal evenveel wordt opgeteld, willen we in formulevorm dat V_{rood} gelijk is aan V_{groen}. Dat betekent dat moet gelden dat $x + 5y = 3x + y$. Dit kunnen we ook schrijven als $4y = 2x$, oftewel $x = 2y$.

Nu is het nog belangrijk om te weten wat deze formule betekent. Als we in een vakje beginnen waarin het rode en het groene getal hetzelfde zijn en vanaf daar naar een ander vakje willen waarin het rode en het groene getal hetzelfde zijn, dan moet x gelijk zijn aan $2y$. Dat betekent dat we $2y$ stappen naar rechts moeten als we y stappen naar beneden gaan, dus we moeten twee keer zoveel stappen naar rechts als naar beneden. Dat is ook precies wat we hebben gezien: bij één stap naar beneden en twee naar rechts kwamen we uit in het vakje in het midden met zowel in rood als in groen het getal 8. Bij twee stappen naar beneden en vier naar rechts komen we al in het vakje rechtsonder, met in rood en groen het getal 15.

HET ECHTE PROBLEEM OPLOSSEN We hebben nu ons zelf bedachte kleinere probleem opgelost. Tijd om terug te gaan naar het grote bord met 28 rijen en 37 kolommen. We weten nu hoe we formules kunnen opstellen en ook dat we daarmee het probleem kunnen oplossen. We gaan dus ook hier op zoek naar formules.

Daarvoor moeten we eerst bedenken wat er gebeurt met de rode en groene getallen als we naar rechts of naar beneden gaan. Als we een vakje naar rechts gaan, wordt het rode getal 1 hoger en het groene getal 28 hoger. Als we één vakje naar beneden gaan, wordt het groene getal 1 hoger en het rode getal 37 hoger. We gebruiken dezelfde notatie als net en vinden:

$V_{\text{rood}} = x + 37y$ en $V_{\text{groen}} = 28x + y$.

We kunnen weer kijken hoeveel we vanuit het vakje linksboven naar rechts en naar beneden moeten zodat bij het rode en bij het groene getal evenveel wordt opgeteld. Daarvoor moeten V_{rood} en V_{groen} weer gelijk aan elkaar zijn. Dat betekent dat moet gelden $x + 37y = 28x + y$, wat we ook kunnen schrijven als $36y = 27x$, dus als $4y = 3x$.

We bekijken ook hier even wat deze formule precies betekent. Er staat dat vier keer het aantal stappen naar beneden gelijk moet zijn aan drie keer het aantal stappen opzij. Als we dus één stap naar beneden zouden doen, zouden we $\frac{4}{3}$ stappen opzij moeten doen. Dat kan natuurlijk niet, we kunnen alleen maar hele stappen doen. Daarom moeten we in sprongen van minstens drie naar beneden, want dan kunnen we ook een geheel aantal, namelijk vier, stappen naar rechts doen.

Als we dit één keer doen vanaf het vakje linksboven, wordt rood $4 + 37 \cdot 3 = 115$ groter en is het getal dat daar in het rood staat dus 116. Als onze formules kloppen, is het groene getal dan ook 115 groter geworden. We vullen in $V_{\text{groen}} = 28 \cdot 4 + 3 = 115$, dus het klopt. Als we nog een keer vier vakjes naar rechts en drie naar beneden gaan, komt er weer 115 bij en is het rode getal 231. De volgende rode getallen die we zo tegenkomen, zijn 346, 461, 576, 691, 806, 921 en 1036. Toen we voor het eerst naar het probleem keken, zagen we dat in de hoek rechtsonder het getal 1036 staat. Hier kunnen we dus niet verder. Dat betekent dat we alle vakjes waarin twee keer hetzelfde getal staat nu hebben gevonden.

Om het antwoord op de oorspronkelijke vraag te vinden, hoeven we alleen nog de rode getallen in deze vakjes op te tellen. Deze rode getallen waren 1, 116, 231, 346, 461, 576, 691, 806, 921 en 1036 en hun som is 5185, dus dat is het antwoord op deze opgave. ■