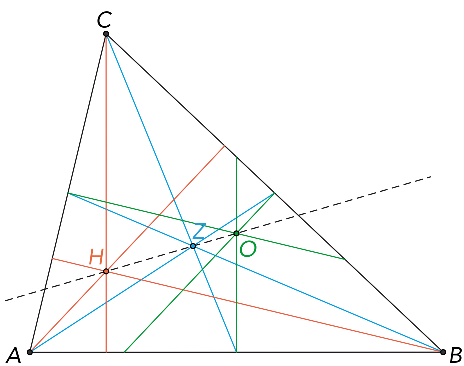
NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Volgende maand vertrekken zes leerlingen naar Kazachstan. Daar vindt dit jaar de Internationale Wiskunde Olympiade plaats. De deelnemers hebben het afgelopen half jaar een trainingsprogramma doorlopen. Een van de onderwerpen die bij de training aan de orde kwamen, is de *negenpuntscirkel*. Merlijn Staps, vijfdeklasser en zelf deelnemer aan de training, legt het uit.

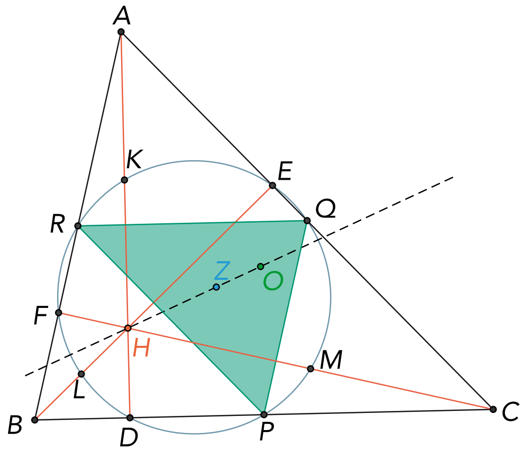
■ door Merlijn Staps

DE NEGENPUNTS-CIRKEL

In de vorige *Pythagoras* heb ik uitgelegd wat de *rechte van Euler* inhoudt: in iedere driehoek liggen het hoogtepunt (het snijpunt van de hoogtelijnen), het zwaartepunt (het snijpunt van de zwaartelijnen) en het middelpunt van de omgeschreven cirkel (het snijpunt van de middelloodlijnen) op één lijn. Hieronder zie je een willekeurige driehoek ABC met hoogtepunt H, zwaartepunt Z en middelpunt van de omgeschreven cirkel O. Zoals gezegd liggen alledrie op de rechte van Euler, en bovendien geldt $|HZ| = 2|ZO|$.



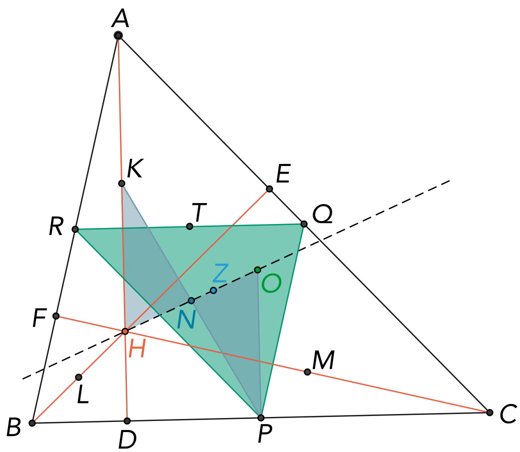
In figuur 1 zie je een driehoek ABC. De punten D, E en F zijn de voetpunten van de hoogtelijnen uit respectievelijk A, B en C en de punten P, Q en R zijn de middens van respectievelijk de zijden BC, CA en AB. Verder zien we dat er een cirkel bij is getekend: de omgeschreven cirkel van $\triangle PQR$. Deze cirkel blijkt bijzonder interessant. Behalve P, Q en R liggen er (zoals je al in het plaatje kunt zien) nog veel meer punten op: D, E, F, de voetpunten van de hoogtelijnen en K, L en M, de middens van de lijnstukken AH, BH en CH. Voor het gemak noemen we deze cirkel Γ (de Griekse hoofdletter gamma). We gaan nu bewijzen dat al die punten daadwerkelijk op Γ liggen. Daarvoor gebruiken we een nieuw plaatje, met daarin extra hulplijnen getekend ter ondersteuning van het bewijs, zie figuur 2.



Figuur 1 Negen punten op een cirkel

HET BEWIJS Laten we eerst eens kijken waar het middelpunt van de cirkel Γ ligt. Het middelpunt is het snijpunt van de middelloodlijnen van $\triangle PQR$. We beginnen met de middelloodlijn van QR. Het midden van QR, waar deze middelloodlijn natuurlijk doorheen gaat, noemen we T. We zien verder dat $PQAR$ een parallellogram is: een vierhoek waarvan de paren overstaande zijden evenwijdig zijn. Van een parallellogram weten we dat de diagonalen elkaar middendoor delen: het midden van diagonaal QR valt dus samen met het midden van diagonaal AP. Dus T, het midden van QR, is ook het midden van AP.

De middelloodlijn van QR gaat door T, en snijdt de rechte van Euler van $\triangle ABC$ in het punt N. De



Figuur 2 Hoe bewijs je dat die negen punten inderdaad op één cirkel liggen?

lijnen AH, TN en OP zijn duidelijk evenwijdig, ze staan namelijk allemaal loodrecht op QR. Omdat T precies halverwege A en P ligt, moet N ook wel halverwege H en O liggen. Dus N is het midden van OH. De middelloodlijn van QR gaat dus door het midden N van OH. Op precies dezelfde manier kunnen we laten zien dat de middelloodlijnen van RP en PQ ook door N gaan. We concluderen dat N het middelpunt is van Γ.

De lijn PN gaat door het middelpunt N van Γ. In het plaatje is PN doorgetrokken totdat hij AD snijdt in het punt K. We weten dat PO // HK en dat $|HN| = |ON|$. Daarom (vanwege de twee congruente driehoeken PNO en KNH) geldt dat $|KN| = |PN|$. Omdat P op Γ ligt en N het middelpunt van Γ is, moet K ook wel op Γ liggen.

Wat weten we precies van dit punt K? We kunnen gemakkelijk inzien dat $|HK| = |PO|$. We hebben echter al gezien dat $|AH| = 2|PO|$, dit hebben we in het bewijs van de rechte van Euler gebruikt. Daarom is K het midden van AH. Het midden van AH ligt dus ook op Γ. En dat is erg leuk, want op dezelfde manier kunnen we laten zien dat de middens van BH en CH, L en M, ook op Γ liggen! Dat zijn al zes punten op Γ.

We hebben net gezien dat KP de middellijn is van Γ. Van middellijnen van cirkels weten we iets heel nuttigs, namelijk de stelling van Thales: als X, Y en Z punten zijn zodanig dat $\angle XYZ = 90°$, dan gaat de cirkel met middellijn XZ door het punt Y. Van deze stelling kunnen we hier gebruik maken.

Terug naar figuur 2. De hoek $\angle KDP$ is natuurlijk recht. Lijnstuk AD was namelijk de hoogtelijn uit A. Kijk nu eens goed naar $\triangle KDP$. Deze heeft een rechte hoek bij D en bovendien is KP de middellijn van de cirkel Γ. Vanwege de stelling van Thales weten we nu dat D ook op deze cirkel ligt.

En weer kunnen we hetzelfde trucje nog twee keer toepassen: de punten E en F, juist de voetpunten uit de hoogtelijnen uit B en C, liggen ook op Γ.

We kunnen nu een indrukwekkend lijstje maken van punten die op Γ liggen:

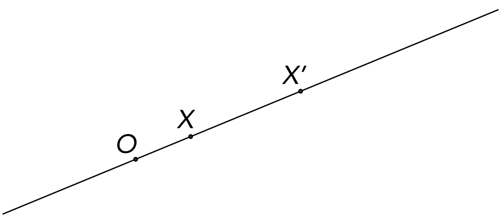
- de middens van de zijden van $\triangle ABC$: P, Q en R;
- de middens K, L en M van de lijnstukken AH, BH en CH, dus van de lijnen van de hoekpunten van $\triangle ABC$ naar het hoogtepunt;
- de voetpunten van de hoogtelijnen van $\triangle ABC$: D, E en F.

Dit zijn bij elkaar negen punten, vandaar dat deze bijzondere cirkel Γ ook wel de *negenpuntscirkel* van $\triangle ABC$ wordt genoemd. We hebben ook al een andere bijzondere eigenschap van deze cirkel gezien: het middelpunt ervan, N, ligt op de rechte van Euler.

EEN PUNTVERMENIGVULDIGING Op de olympiadetraining leren we een heleboel andere technieken en trucs die ook handig kunnen zijn om meetkundeproblemen op te lossen. Een voorbeeld hiervan is de zogeheten *puntvermenigvuldiging*. Bij een puntvermenigvuldiging worden er als het ware punten in het vlak 'verplaatst', eigenlijk net zo als bij een translatie (verschuiving) of een spiegeling.

In de vorige *Pythagoras* heb ik uitgelegd hoe dit in zijn werk gaat. Nog even een korte samenvatting. We kiezen een centrum O en een factor f. Het beeld van een punt X onder de puntvermenigvuldiging is nu precies het punt X' op OX waarvoor geldt dat

$$\frac{|OX'|}{|OX|} = |f|.$$



Figuur 3 Een puntvermenigvuldiging

Als $f > 0$ kiezen we X' aan dezelfde kant van O als X, als $f < 0$ kiezen we X' precies aan de andere kant. In figuur 3 zie je het beeld van het punt X onder de puntvermenigvuldiging met centrum O en factor 3.

Terug naar $\triangle ABC$. We bekijken de puntvermenigvuldiging met centrum Z en factor $-\frac{1}{2}$. Omdat het zwaartepunt een zwaartelijn opdeelt in twee stukken die zich verhouden in een verhouding van 2 : 1, is het beeld van A precies het punt P. Net zo, is het beeld van B het punt Q en het beeld van C het punt R. Dus $\triangle ABC$ gaat over in $\triangle PQR$. Dan gaat de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ ook over in de omgeschreven cirkel van $\triangle PQR$. Maar dat was die cirkel Γ, de negenpuntscirkel! Kortom, de omgeschreven cirkel van een driehoek wordt door deze bijzondere puntvermenigvuldiging omgetoverd in zijn negenpuntscirkel.

Zo weten we natuurlijk nog niet dat D, E, F, K, L en M óók op Γ liggen. Het bewijs voor de rechte van Euler uit de vorige *Pythagoras* was geheel te vervangen door een bewijs met behulp van een puntvermenigvuldiging. Zo een kort bewijs met behulp van een puntvermenigvuldiging hebben we hier niet. Toch zijn er nog een hoop leuke dingen te ontdekken, zie de opgaven in het kader.

Het feit dat H, Z en O op een lijn liggen werd in 1765 bewezen door Leonhard Euler. Dat de voetpunten van de hoogtelijnen en de middens van de zijden op een cirkel liggen, was al langer bekend. De negenpuntscirkel wordt vaak de *cirkel van Feuerbach* genoemd: de Duitse wiskundige Feuerbach ontdekte echter niet alleen dat de middens van de lijnstukken AH, BH en CH op deze cirkel liggen, maar nóg een bijzondere eigenschap ervan: de negenpuntscirkel raakt aan zowel de ingeschreven cirkel als de aangeschreven cirkels van een driehoek!

LITERATUUR

Een prachtig meetkundeboek is *Geometry Revisited* van H.S.M. Coxeter en S.L. Greitzer. Dit boek is gebruikt bij het schrijven van dit aritkel.
Ook op internet is veel te vinden, zie bijvoorbeeld http://mathworld.wolfram.com/Nine-PointCircle.html. ■

OPGAVEN

1. Kun je met behulp van de negenpuntscirkel bewijzen dat $|DR| = |PQ|$?
2. Als we eens goed naar de puntvermenigvuldiging kijken, wat kunnen we dan zeggen over de straal van de negenpuntscirkel in verhouding tot die van de omgeschreven cirkel?
3. Kunnen we ook met behulp van de puntvermenigvuldiging (en het feit dat de omgeschreven cirkel overgaat in de negenpuntscirkel) bewijzen dat N het midden is van HO?
4. We bekijken een andere puntvermenigvuldiging: die met centrum H en factor $+\frac{1}{2}$. Het beeld van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ onder deze puntvermenigvuldiging is weer de negenpuntscirkel Γ! Van welke punten is het nu direct duidelijk dat ze op Γ liggen?

ANTWOORDEN

1. Jazeker. Van de vierhoek $RDPQ$ weten we dat $DP \,//\, QR$, dus deze vierhoek is een trapezium. Vanwege U-hoeken geldt nu $\angle PDR + \angle DRQ = 180°$. Bovendien heeft dit trapezium een omgeschreven cirkel (namelijk Γ), dus vanwege de koordenvierhoekstelling geldt juist $\angle PDR + \angle RQP = 180°$. Als we deze twee hoekengelijkheden combineren, vinden we dat $\angle DRQ = \angle RQP$. Omdat we wisten dat $DP \,//\, QR$ geldt nu $|DR| = |PQ|$.
2. Bij onze puntvermenigvuldiging werd alles 'twee keer zo klein' door de factor $f = -\frac{1}{2}$. Daarom is de straal van de negenpuntscirkel ook precies de helft van de straal van de omgeschreven cirkel.
3. Ja, want omdat O overgaat in N bij de puntvermenigvuldiging, moet gelden $|ON| = |OZ| + |ZN| = |OZ| + \frac{1}{2} \cdot |OZ| = \frac{3}{2} \cdot |OZ|$. Omdat het hele lijnstuk $|OH| = |OZ| + |ZH| = |OZ| + 2|OZ| = 3|OZ|$ lang is, ligt N precies halverwege H en O.
4. Van K, L en M, want omdat $|AH| = 2|KH|$ en K en A aan dezelfde kant van H liggen, is het beeld van A onder deze puntvermenigvuldiging K. Dus K ligt op de negenpuntscirkel. Analoog kunnen we laten zien dat ook L en M op de negenpuntscirkel liggen.