Elk jaar nemen enkele tientallen leerlingen die hoog zijn geëindigd bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade deel aan een training ter voorbereiding op de Internationale Wiskunde Olympiade, de Benelux Wiskunde Olympiade en – dit jaar voor het eerst – de European Girls' Mathematical Olympiad. De training omvat onderwerpen die buiten de middelbareschoolstof vallen, maar toch nodig zijn om een kans te maken bij zo'n internationale wedstrijd. Een van die onderwerpen is *invariantie*.

■ door Merlijn Staps

VLIEGENDE KRAAIEN EN ZIEKE SCHAAKBORDEN

Op een rij staan elf bomen. In elke boom zit een kraai. Een kraai kan van een boom naar een andere boom vliegen, maar een kraai mag alleen k bomen naar rechts vliegen als er tegelijkertijd een andere kraai k bomen naar links vliegt. Is het mogelijk dat alle kraaien in één boom terechtkomen?

We kunnen dit gedaan krijgen door alle kraaien naar de middelste boom te laten vliegen: van de kraaien uit de buitenste bomen vliegt er één 5 bomen naar rechts en één 5 bomen naar links, van de kraaien uit de op één na buitenste bomen vliegt er één 4 bomen naar rechts en de ander 4 bomen naar links, enzovoort. De kraai in de middelste boom blijft gewoon zitten. Het antwoord op deze vraag is dus: ja, dat is mogelijk.

EEN BOOM MINDER

Het wordt een stuk interessanter als we kijken naar tien bomen in plaats van elf. We beginnen weer met in elke boom een kraai en stellen dezelfde eis aan de verplaatsingen van de kraaien: vliegt er een kraai k bomen de ene kant op, dan moet er een andere kraai k bomen de andere kant op vliegen. Als je nu probeert alle kraaien in één boom te krijgen, blijkt dit niet zo makkelijk te zijn. Misschien verwacht je dat het onmogelijk is: er is nu immers geen middelste boom meer. Maar dat is natuurlijk nog geen bewijs. Met het *invariantieprincipe* kunnen we deze veronderstelling echt hard maken.

Nummer eerst de bomen: 1, 2, ..., 10. Schrijf voor iedere kraai het nummer van de boom op waar hij in zit. Bijvoorbeeld, als er drie kraaien in boom 1 zitten, twee kraaien in boom 4, twee kraaien in boom 6, één kraai in boom 7 en twee kraaien in boom 8, schrijven we op: 1, 1, 1, 4, 4, 6, 6, 7, 8, 8.

Tel deze tien getallen bij elkaar op; hun som noemen we S. Hier hebben we dus $S = 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 6 + 6 + 7 + 8 + 8 = 46$. In het begin, met in iedere boom precies één kraai, vinden we $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$.

Wat gebeurt er met de waarde van S als kraaien zich verplaatsen? Wanneer een kraai k bomen naar rechts vliegt, neemt S met k toe. Maar de eis is, dat dan ook een kraai k bomen naar links vliegt, waardoor S met k afneemt. Daardoor zal S dus netto niet veranderen. Omdat S in het begin 55 is, blijft S *altijd* 55.

Stel nu dat op een gegeven moment alle kraaien in één boom zouden zitten, zeg in boom nummer i, dan is $S = 10i$. Dat betekent dat S deelbaar is door 10. Maar dat is onmogelijk, want we weten dat $S = 55$. De kraaien kunnen dus niet allemaal in één boom terechtkomen!

INVARIANTEN EN HALFVARIANTEN In het voorbeeld met de kraaien zagen we dat S niet veranderde bij elke dubbele vliegbeweging van de kraaien: we noemen S daarom een *invariant*. In allerlei processen die in de tijd veranderen, zijn invarianten te vinden. In de natuurkunde is de totale hoeveelheid energie bijvoorbeeld invariant: energie kan worden omgezet in andere soorten energie, maar er kan nooit energie bijkomen of energie verdwijnen.

In de wiskunde zijn invarianten bruikbaar om te laten zien dat een bepaalde eindsituatie niet uit een bepaalde beginsituatie bereikt kan worden. In het kraaienprobleem kunnen de kraaien zich op heel veel verschillende manieren over de bomen verspreiden en de situatie kan ook telkens op heel veel manieren veranderen. Maar de grootheid S bood ons houvast – die veranderde immers juist niet.

Stel nu dat we een grootheid hebben die dan wel niet altíjd hetzelfde blijft, maar die maar 'één kant op' verandert: dus ofwel alleen groter wordt, ofwel alleen kleiner. Ook die wetenschap is nuttig bij wiskundige problemen en zo'n grootheid noemen we een *halfvariant*. De waarde van een halfvariant neemt dus ofwel alleen maar toe, ofwel alleen maar af.

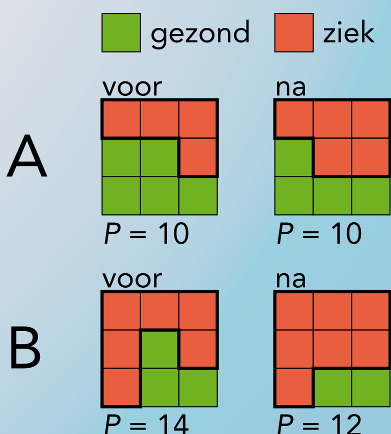
EEN ZIEK SCHAAKBORD We bekijken nu een tweede voorbeeld, waarbij we een halfvariant zullen gebruiken.

Van een 8 × 8 schaakbord zijn een aantal vakjes ziek. Deze ziekte is erg besmettelijk: als een vakje een zijde gemeenschappelijk heeft met minstens twee zieke vakjes, wordt dat vakje ook ziek. Uiteindelijk zijn alle vakjes van het bord ziek. Laat zien dat er aan het begin van de epidemie minstens 8 vakjes ziek waren.

We pakken dit als volgt aan: we laten zien dat als we met 7 zieke vakjes beginnen, dan nooit alle vakjes van het bord ziek kunnen worden. Daaruit volgt dat als uiteindelijk alle vakjes ziek worden, er aan het begin minstens 8 vakjes ziek moeten zijn geweest. Dat aantal is overigens ook daadwerkelijk genoeg: als alle vakjes op een hoofddiagonaal ziek zijn, wordt het hele bord ziek.

We beginnen dus met 7 zieke vakjes, en kijken wat er gebeurt met de *omtrek* P van het zieke gebied. Aan het begin is deze omtrek hoogstens $4 \times 7 = 28$, dus $P \leq 28$; P is kleiner als sommige van de 7 vakjes tegen elkaar aan liggen. Wat gebeurt er met de omtrek van het zieke gebied als er meer vakjes ziek worden?

Bekijk eerst eens wat er gebeurt als één vakje besmet raakt. Zie onderstaande figuur voor twee voorbeelden op een klein schaakbord (3 × 3). In beide gevallen wordt het middelste vakje besmet. In voorbeeld A heeft het middelste vakje twee zieke en twee gezonde buren; de omtrek van het zieke gebied verandert hier niet. In voorbeeld B heeft het middelste vakje drie zieke buren en één gezonde buur; de omtrek van het zieke gebied neemt hier met 2 af. Dus in deze voorbeelden geldt: P blijft ge-



lijk, of wordt kleiner.

We laten nu zien dat dit altijd geldt. Bekijk de buren van een bepaald vakje: de vier (of minder) vakjes waar het een zijde gemeenschappelijk mee heeft. Als een buur ziek is, tellen we de rand tussen ons vakje en die buur eerst in de omtrek van het zieke gebied. Als ons gezonde vakje besmet raakt, tellen we het niet meer: het is dan immers een rand tussen twee zieke vakjes geworden. Voor al deze buren neemt P dus met 1 af.

Als een buur gezond is, tellen we de rand tussen ons vakje en die buur eerst niet in de omtrek van het zieke gebied, want het is dan een rand tussen twee gezonde vakjes. Wanneer het besmet is geraakt, tellen we deze rand juist wel; het is dan een rand tussen een ziek en een gezond vakje.

Dus voor deze buren neemt P met 1 toe als ons vakje besmet raakt.

Samenvattend zien we dat P met 1 afneemt voor alle zieke buren van ons vakje, en dat P met 1 toeneemt voor alle gezonde buren van ons vakje. Omdat ons vakje minstens 2 zieke buren heeft en dus ook hoogstens 2 gezonde buren, neemt P met minstens 2 af en met maximaal 2 toe. We zien dus dat P niet groter kan worden, maar altijd ofwel gelijk blijft ofwel afneemt. Dus P is een halfvariant: een grootheid die maar in één richting verandert, in dit geval naar beneden.

In de beginsituatie was P hoogstens 28, dus in de eindsituatie is P ook hoogstens 28. Maar voor een volledig besmet bord is de waarde van P gelijk aan $4 \times 8 = 32$. Dus als we met 7 vakjes beginnen, kan nooit het hele bord besmet raken! ■

OM ZELF OVER NA TE DENKEN

1. We beginnen met het rijtje nullen en enen 0, 1, 1, 0, 1, 0. We mogen een aantal keer ergens het deelrijtje 0, 1 invoegen of ergens het deelrijtje 1, 0 verwijderen. Kunnen we eindigen met het rijtje 0, 1, 1, 1, 0, 1?
2. Op een schoolbord staan de getallen 1, 2, ..., 100. We mogen twee getallen wegvegen en vervangen door hun verschil. Nadat we dit 99 keer hebben gedaan staat er nog één getal op het bord. Kan dit getal 0 zijn? Of 1?
3. We hebben drie vliegen op de roosterpunten (0, 0), (1, 0) en (0, 1). Er mag één vlieg tegelijkertijd bewegen, en een vlieg mag alleen bewegen in de richting evenwijdig aan de lijn door de twee andere vliegen. Kunnen de vliegen eindigen op de roosterpunten (4, 1), (4, 2) en (6, 1)? (Hint: kijk naar de driehoek die de drie vliegen maken. Welke eigenschap van deze driehoek is invariant?)

OPLOSSINGEN 1. Het verschil D tussen het aantal enen en het aantal nullen is invariant. In het begin is $D = 0$, op het eind is $D = 2$. We kunnen dus niet met dat rijtje eindigen.

2. We kunnen met een 0 eindigen door eerst steeds twee opeenvolgende getallen te kiezen: dan hebben we vijftig enen. Deze kunnen we vervangen door 25 nullen door steeds twee enen te kiezen. Daarna kunnen we nog 24 keer een nul wegstrepen.

We kunnen niet een 1 overhouden. Immers, de som S van alle getallen op het bord is aan het begin $1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{1}{2} \times 100 \times (1 + 100) = 5050$. Als we de getallen a en b met $a > b$ kiezen, neemt S met $a + b$ af en met $a - b$ toe en netto dus met $2b$ af. Omdat $2b$ even is en S aan het begin even is, blijft S dus even (de *pariteit*, het even of oneven zijn, van S is dus invariant). We kunnen niet met een 1 op het bord eindigen, want dan is $S = 1$, oneven.

3. De oppervlakte van de driehoek die de drie vliegen maken is invariant. De oppervlakte is aan het begin $\frac{1}{2}$. In de eindsituatie zou deze 1 zijn. We kunnen de eindsituatie dus niet bereiken.