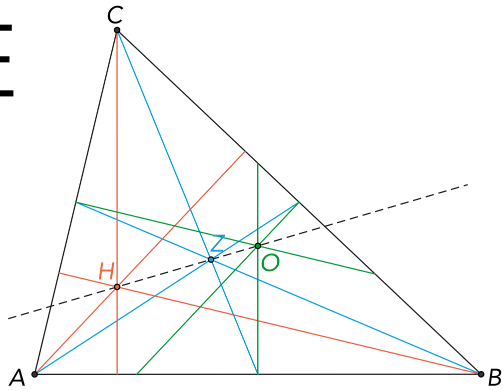
Op dit moment volgen zo'n dertig leerlingen een trainingsprogramma voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Een van die leerlingen is Merlijn Staps; hij maakt kans om Nederland te vertegenwoordigen bij die internationale wedstrijd, komende zomer in Kazachstan. In dit artikel vertelt hij over een van de onderwerpen uit het trainingsprogramma: de rechte van Euler.

■ door Merlijn Staps

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

DE RECHTE VAN EULER



Figuur 1 Een driehoek met het hoogtepunt H, het zwaartepunt Z en het middelpunt van de omgeschreven cirkel O

Tijdens het trainingsprogramma krijgen we als deelnemers een hoop wiskunde te zien die niet in de schoolboeken staat, maar wel erg leuk en nuttig is. Deze wiskunde hebben we nodig om de lastige wiskundesommen te maken die we iedere week moeten insturen.

Om te weten wat de *rechte van Euler* is, moet je eerst iets weten over een aantal bijzondere lijnen in een driehoek: hoogtelijnen, zwaartelijnen en middelloodlijnen. In figuur 1 zie je een driehoek waarin deze lijnen zijn getekend.

Een zwaartelijn (de blauwe lijnen in de figuur) gaat door een hoekpunt en door het midden van de overstaande zijde. Zo kunnen we in iedere driehoek drie zwaartelijnen tekenen. Deze drie zwaartelijnen gaan door één punt, het zwaartepunt. In het kader op pagina 29 kun je lezen waarom dit zo is.

Een hoogtelijn (de rode lijnen in de figuur) gaat ook door een hoekpunt en staat loodrecht op de overstaande zijde. Van school weten we dat de drie hoogtelijnen van een driehoek ook door één punt gaan. Dit punt noemen we het hoogtepunt.

De middelloodlijnen (de groene lijnen in de figuur) tot slot gaan door de middens van de zijden en staan ook loodrecht op de zijden. Op school leer je dat ook de middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan. Dit punt is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek, de cirkel door de drie hoekpunten.

In figuur 1 is het hoogtepunt H, het zwaartepunt Z en het middelpunt van de omgeschreven cirkel O. Wat zien we als we naar dit plaatje kijken? De punten H, Z en O liggen op een lijn! We zullen bewijzen dat dit altijd het geval is: in iedere driehoek liggen het hoogtepunt, het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel op een lijn. Deze lijn wordt de *rechte van Euler* genoemd.

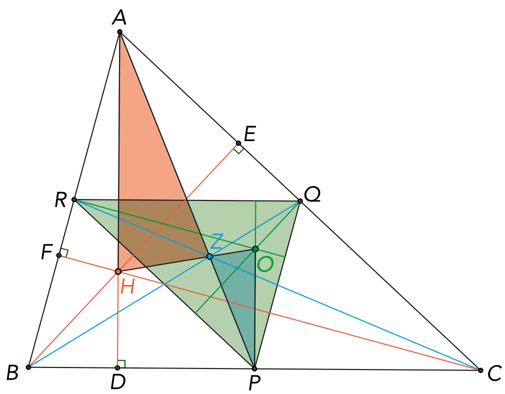
HET BEWIJS In figuur 2 zie je een willekeurige driehoek ABC. We definiëren P, Q en R als de middens van de zijden BC, CA en AB. Verder zijn D, E en F de voetpunten van de hoogtelijnen uit A, B en C. Het hoogtepunt is weer H, het zwaartepunt Z en het middelpunt van de omgeschreven cirkel is wederom O.

Om te bewijzen dat H, Z en O daadwerkelijk op een lijn liggen, gaan we eerst aantonen dat de driehoeken AHZ en POZ gelijkvormig zijn. De hoogtelijn AH en de middelloodlijn PO staan allebei loodrecht op zijde BC. Hieruit volgt dat deze twee lijnen evenwijdig zijn, oftewel $AH \,//\, PO$. Vanwege Z-hoeken geldt nu $\angle HAZ = \angle OPZ$.

Verder weten we dat $|AZ| : |ZP| = 2$, omdat AP een zwaartelijn is (dit wordt bewezen in het kader op pagina 29).

Als we nu ook nog zouden kunnen aantonen dat $|AH| : |OP| = 2$, zouden we mogen concluderen (vanwege het gelijkvormigheidsgeval zhz, zijde-hoek-zijde) dat de driehoeken AHZ en POZ gelijkvormig zijn. We willen dus nog laten zien dat AH twee keer zo lang is als OP.

Om dit aan te tonen, gaan we eens goed naar de driehoeken ABC en PQR kijken. We hebben $\triangle PQR$ gevormd door de middens van de zijden van $\triangle ABC$ te verbinden. Omdat de zijden van



Figuur 2 Hoe bewijs je dat H, Z en O op één lijn liggen?

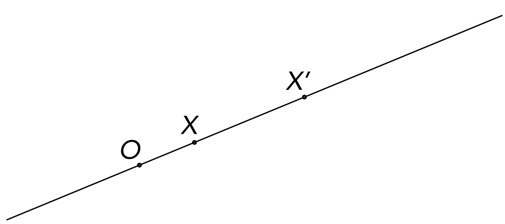
$\triangle PQR$ middenparallellen zijn in $\triangle ABC$, geldt (naast het feit dat ze evenwijdig aan de zijden van $\triangle ABC$ lopen) dat

$$\frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|QR|} = \frac{|CA|}{|RP|} = 2.$$

De zijden van $\triangle ABC$ zijn dus precies twee keer zo lang als die van $\triangle PQR$.

Het hoogtepunt van $\triangle ABC$ is H. Weten we ook wat het hoogtepunt van $\triangle PQR$ is? Wat zijn eigenlijk de hoogtelijnen van $\triangle PQR$? Wat is bijvoorbeeld de hoogtelijn uit P op zijde QR?

We weten dat voor deze hoogtelijn moet gelden dat hij door P gaat en loodrecht op QR staat. Omdat QR // BC (QR was immers een middenparallel), is de middelloodlijn van zijde BC precies de lijn die we zoeken. Die gaat immers door het midden P van BC, en hij staat natuurlijk loodrecht op BC, dus loodrecht op QR.



Figuur 3 Een puntvermenigvuldiging

Nu zien we iets heel leuks: de hoogtelijnen van $\triangle PQR$ zijn precies de middelloodlijnen van $\triangle ABC$! Het hoogtepunt van $\triangle PQR$ is dus O, het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Met die wetenschap kunnen we bewijzen dat $|AH| = 2|OP|$. Want AH is het lijnstuk van hoekpunt A naar hoogtepunt H in $\triangle ABC$. Net zo is PO de lijn van hoekpunt P naar hoogtepunt O in $\triangle PQR$. We hadden al gezien dat de lengtes van de zijden van $\triangle ABC$ precies twee keer zo groot zijn als die van $\triangle PQR$. Daarom moet de lijn AH van een hoekpunt naar het hoogtepunt in $\triangle ABC$ ook precies twee keer zo lang zijn als de lijn van het corresponderende hoekpunt P naar hoogtepunt O in $\triangle PQR$. Dus $|AH| = 2|PO|$ en daaruit volgt dat $\triangle AHZ$ en $\triangle POZ$ gelijkvormig zijn. We kunnen hieruit concluderen dat $\angle AZH = \angle PZO$; in twee gelijkvormige driehoeken zijn de paren corresponderende hoeken immers gelijk. Omdat A, Z en P natuurlijk op een lijn liggen, moeten de punten H, Z en O nu ook wel op een lijn liggen, want we zagen net dat de overstaande hoeken bij Z even groot zijn. En dat was precies wat we wilden bewijzen: H, O en Z liggen op een lijn, de rechte van Euler. Bovendien krijgen we met onze gelijkvormigheid, waarvan we de factor weten (die is immers 2), nog een leuke eigenschap van de rechte van Euler cadeau: $|HZ| = 2|ZO|$.

EEN PUNTVERMENIGVULDIGING Laten we nog eens goed naar het voorgaande bewijs kijken. Wat hebben we allemaal gebruikt? We hebben eigenlijk alleen gebruik gemaakt van een gelijkvormigheid en verder natuurlijk wat we weten over zwaartelijnen, middelloodlijnen en hoogtelijnen.

Op de olympiadetraining leren we een heleboel andere technieken en trucs die ook handig kunnen zijn om meetkundeproblemen op te lossen. Een voorbeeld hiervan is de zogeheten *puntvermenigvuldiging*. Bij een puntvermenigvuldiging worden er als het ware punten in het vlak 'verplaatst', eigenlijk net zoals bij een translatie (verschuiving) of een spiegeling.

We duiden een puntvermenigvuldiging vaak aan met de letter $\mathcal{J}$. Bij een puntvermenigvuldiging $\mathcal{J}$ hoort een punt O, het centrum, en een getalletje (een factor) f. Daarna worden alle punten in het vlak aan de hand van die twee waarden, O en f, verplaatst!

Dit gaat als volgt. Stel dat we een bepaald punt X hebben. Dan tekenen we de lijn OX. Op deze lijn komt ons nieuwe punt terecht, dit noemen we ook wel het *beeld van X onder $\mathcal{J}$*. De gebruikelijke notatie voor dit punt is X'.

Het beeld X' kunnen we natuurlijk niet willekeurig op OX kiezen. We moeten het zo kiezen dat

$$\frac{|OX'|}{|OX|} = |f|.$$

Dit is misschien wat abstract. Stel bijvoorbeeld dat $f = 3$. Voor een punt X tekenen we de lijn OX. Het punt X' moet dan op die lijn liggen, zodanig dat het drie keer zo ver van O af ligt als X zelf. In figuur 3 zie je hier een voorbeeld van.

Verder spreken we af: als $f > 0$, dan ligt X' aan dezelfde kant van O als X, maar als $f < 0$, ligt X' precies aan de andere kant. Je merkt dat ik het geval $f = 0$ oversla. Dat geval is echter niet zo interessant, omdat alle punten in het vlak dan op O worden gebombardeerd!

Je denkt nu misschien: leuk, zo'n puntvermenigvuldiging, maar wat heb je eraan? Dat laat ik straks zien aan de hand van de rechte van Euler. Eerst geef ik wat basale eigenschappen van puntvermenigvuldigingen:

- het beeld van een lijn is een lijn;
- het beeld van een driehoek is een driehoek gelijkvormig met het origineel;
- het beeld van een cirkel is een cirkel.

We gaan nog eens terug naar figuur 1 en bekijken de puntvermenigvuldiging, met centrum Z en factor $-\frac{1}{2}$. Wat gaat er gebeuren als we op een aantal punten deze puntvermenigvuldiging loslaten?

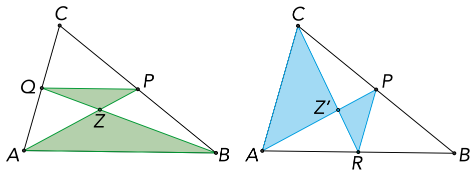
We hebben het punt A van de driehoek. Waar komt die terecht bij die puntvermenigvuldiging? We moeten de lijn AZ tekenen, en dan A' zo kiezen dat A' twee keer zo dicht bij Z ligt als A. Het midden van AZ dus? Nee, omdat de factor negatief is, moet A' aan de andere kant van Z liggen. Dus A' ligt op AZ, precies aan de andere kant van Z dan A, en $|AZ| = 2|A'Z|$.

Kennen wij dit punt ergens van? Ja, dat was precies het punt P, want we weten van een zwaartelijn dat hij door het zwaartepunt Z wordt opgedeeld in twee stukken die tot elkaar staan in een verhouding 2 : 1. Dus A gaat over in P. We kunnen net zo laten zien dat B over gaat in Q, en dat C over gaat in R.

De hele $\triangle ABC$ gaat dus over in $\triangle PQR$ onder puntvermenigvuldiging met centrum Z en factor $-\frac{1}{2}$. Maar dat betekent dat het hoogtepunt van $\triangle ABC$ ook overgaat in het hoogtepunt van $\triangle PQR$. Oftewel, H gaat over in O, met andere woorden, $H' = O$. Nu hoeven we alleen nog maar te gebruiken dat bij een puntvermenigvuldiging het origineel, het beeld en het centrum op een lijn liggen. Dus H, O en Z liggen op een lijn, precies de rechte van Euler. En weer krijgen we direct de verhouding $|HZ| = 2|ZO|$ erbij.

Zoals je ziet, is het bewijs met behulp van de puntvermenigvuldiging veel sneller.

NEGENPUNTSCIRKEL In dit artikel hebben we een bijzondere eigenschap van een driehoek gezien: het hoogtepunt, het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel liggen op een lijn. In het volgende nummer van *Pythagoras* zal ik nóg een bijzondere eigenschap van driehoeken laten zien. Deze bijzondere eigenschap is dat er negen punten zijn (onder andere de middens van de zijden) die in iedere driehoek op één cirkel liggen. Deze cirkel heet daarom de *negenpuntscirkel*. ■



ZWAARTELIJNEN IN EEN DRIEHOEK

In iedere driehoek gaan de zwaartelijnen door één punt en bovendien verdeelt het zwaartepunt Z zwaartelijn AP in twee delen die zich verhouden als

$$\frac{|AZ|}{|ZP|} = 2.$$

Definieer Z als het snijpunt van AP met BQ. Omdat PQ een middenparallel is, geldt $AB \,//\, PQ$. We zien een zandloperfiguur: $\triangle ABZ \sim \triangle PQZ$. Omdat $|AB| = 2|PQ|$, volgt dat

$$2 = \frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{|AZ|}{|ZP|}.$$

Nu definiëren we Z' als het snijpunt van AP met CR. Op dezelfde manier krijgen we nu ook dat $|AZ'| : |Z'P| = 2$. Omdat Z en Z' beide op AP en binnen de driehoek liggen, moet nu gelden dat $Z = Z'$. Dus de zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt en bovendien hebben we de gevraagde verhouding bewezen.

LITERATUUR

Een prachtig meetkundeboek is *Geometry Revisited* van H.S.M. Coxeter en S.L. Greitzer. Dit boek is gebruikt bij het schrijven van dit artikel.