Op 12 september deden 123 leerlingen uit heel Nederland mee aan de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, die gehouden werd op de Technische Universiteit Eindhoven. De genodigden waren leerlingen die in januari op hun eigen school bij de eerste ronde hoog hadden gescoord. Nieuw dit jaar was dat al deze leerlingen in de tussentijd hebben kunnen deelnemen aan een training, speciaal gericht op deze tweede ronde.

■ door Quintijn Puite

ÉÉN PROBLEEM, DRIE OPLOSSINGEN

Waar de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade nog bestaat uit meerkeuzevragen en open opgaven met een getal als antwoord, wordt bij de tweede ronde naar echte bewijzen gevraagd. Dan kan een beetje oefenen natuurlijk geen kwaad! De leerlingen die na de eerste ronde door waren naar de tweede ronde, zijn dit jaar dan ook allemaal uitgenodigd om in de aanloop daarnaartoe deel te nemen aan een training voor de tweede ronde door oud-olympiadedeelnemers op een universiteit in hun regio. Hierbij ging het onder andere over onderwerpen uit de getaltheorie en meetkunde, terwijl ook werd ingegaan op de vraag hoe je nu een probleem kunt aanpakken en hoe je een bewijs goed opschrijft. Daarnaast kwamen algemene bewijstechnieken aan bod, zoals bewijzen uit het ongerijmde, volledige inductie en het ladenprincipe. Het materiaal is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl/trt.

Goed voorbereid konden de meeste deelnemers op deze manier op 12 september aan de tweede ronde beginnen. In dit artikel gaan we nader in op een van de pittigste opgaven:

We spelen een spel met een rij van 2008 gehele getallen. Alle getallen in de rij zijn groter dan of gelijk aan 0. Een *zet* bestaat uit het kiezen van een getal *b* uit de rij, waarvan de twee buurgetallen *a* en *c* positief (dus groter dan 0) zijn. We vervangen dan *a*, *b* en *c* door respectievelijk *a* – 1, *b* + 7 en *c* – 1. Het eerste en het laatste getal van de rij mogen niet gekozen worden omdat ze maar één buur hebben. Als we geen getal *b* meer kunnen vinden waarvan beide buurgetallen positief zijn, kunnen we geen zet meer doen en stopt het spel. Bewijs dat het spel altijd op een gegeven moment stopt, met welke rij getallen we ook beginnen en welke zetten we ook doen.

1^e	2^e	3^e	4^e	5^e	som	gewogen som
7	7^2	7^3	7^4	7^5		◀ gewichten
3	6	10	4	5	28	97384
-1	+7	-1				
2	13	9	4	5	33	97377
	-1	+7	-1			
2	12	16	3	5	38	97328
		-1	+7	-1		
2	12	15	10	4	43	96985
-1	+7	-1				
1	19	14	10	4	48	96978
-1	+7	-1				
0	26	13	10	4	53	96971
	-1	+7	-1			
0	25	20	9	4	58	96922
	-1	+7	-1			
0	24	27	8	4	63	96873
		-1	+7	-1		
0	24	26	15	3	68	96530
	-1	+7	-1			
0	23	33	14	3	73	96481
		-1	+7	-1		
0	23	32	21	2	78	96138
		-1	+7	-1		
0	23	31	28	1	83	95795
		-1	+7	-1		
0	23	30	35	0	88	95452

De eerste twaalf zetten van een mogelijk spelverloop bij een rij van 5 getallen

EEN BEETJE PROBEREN Om de opgave tot ons door te laten dringen, bekijken we eerst maar eens een voorbeeld. We spelen voor het gemak een spel met 5 getallen in plaats van 2008 en beginnen bijvoorbeeld met **3-6-10-4-5**. We kiezen als eerste zet voor b het tweede getal. Dan wordt dit tweede getal dus met 7 opgehoogd, terwijl zijn twee buren met 1 afnemen. We krijgen dan **2-13-9-4-5**. Laten we nu eens een zet doen met het derde getal en dan een zet met het vierde getal (zie de tabel), dan is het resultaat **2-12-15-10-4**. En als we nu weer voor b het tweede getal kiezen, komen we op **1-19-14-10-4** uit. Wat is er nu met de getallen gebeurd? Sommige zijn toegenomen, andere afgenomen. In elk geval zijn de twee getallen aan de buitenkant afgenomen. Dat is ook best logisch; ze kunnen nooit toegenomen zijn, want voor b mogen we niet het eerste of laatste getal van de rij kiezen.

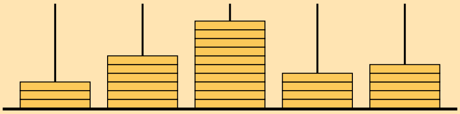
We gaan maar weer door en kiezen voor b nog een keer het tweede getal; dan komen we uit op **0-26-13-10-4**. Die nul aan het begin: dat is goed nieuws! We mogen voor b nu namelijk nooit meer het tweede getal uit de rij kiezen; hij wordt geblokkeerd door zijn linkerbuurman. Nu hebben we voor b dus alleen nog de keuze tussen het derde en het vierde getal.

Vervolgens kunnen we hiervoor net zo'n redenering opzetten als hierboven. Bij het kiezen van het derde getal neemt het tweede getal steeds met 1 af en bij het spelen van het vierde getal gebeurt er niets met het tweede getal. Omdat het tweede getal op dit moment 26 is, kunnen we maar hooguit 26 maal een zet met het derde getal doen. In de tabel is een verder mogelijk spelverloop weergeven en we zien inderdaad dat het tweede getal langzaamaan afneemt. Omdat we al hebben beredeneerd dat deze zet maar eindig vaak kan voorkomen (namelijk hooguit 26 keer vanaf het hierboven genoemde 'goed-nieuws-moment'), moet er een laatste keer zijn dat hij voorkomt in het spel dat hier gespeeld wordt. Het hangt natuurlijk van het daadwerkelijke spelverloop af of al deze 26 zetten ook nog echt worden gespeeld. We nemen even aan dat de laatste zet met het derde getal ons heeft gebracht tot de situatie **0-23-33-14-3**. We hadden voor b alleen nog de keuze tussen het derde en het vierde getal, maar omdat we alle keren dat het derde getal als b werd gekozen zojuist hebben afgesloten, is vanaf nu alleen nog het vierde getal mogelijk. Daardoor neemt het derde (en ook het vijfde) getal steeds met 1 af. En dát kan niet oneindig lang zo doorgaan!

FORMALISEREN Met bovenstaand voorbeeld zijn we voor onszelf wel redelijk overtuigd dat de bewering klopt. We hebben een behoorlijk algemeen voorbeeld gepakt en een aantal willekeurige zetten gedaan. Weliswaar hebben we het aantal 2008 vervangen door 5, maar dat lijkt niet echt relevant. Toch moeten we nu nog aan onze netversie van het bewijs beginnen. En we moeten dat zo

BEWIJS 1: RECHT TOE RECHT AAN

Bekijk een willekeurige beginrij $n_1, n_2, ..., n_{2008}$ en een willekeurige rij zetten. Het eerste getal n_1 neemt elke keer met 1 af wanneer we $b = n_2$ kiezen; dan is immers $a = n_1$. Als we voor b een andere n_k kiezen, blijft n_1 onveranderd. We kunnen dus maar hooguit n_1 keer $b = n_2$ kiezen. Ergens in onze chronologische rij zetten wordt $b = n_2$ dus voor de laatste keer gekozen (of überhaupt niet); vanaf de daaropvolgende zet (resp. de eerste zet) kiezen we dus alleen nog $b = n_3$ tot en met $b = n_{2007}$. We bekijken nu de rest van de zetten vanaf deze genoemde zet. Laat n_2 nu de waarde zijn van het tweede getal bij aanvang van die zet (bedenk dat n_2 in de zetten daarvoor steeds met 7 is opgehoogd bij elke zet $b = n_2$ en met 1 is verlaagd bij elke zet $b = n_3$, dus de nieuwe waarde van n_2 kan heel anders zijn dan de beginwaarde). Vanaf die zet neemt n_2 elke keer met 1 af wanneer we $b = n_3$ kiezen, en als we voor b een andere n_k kiezen ($b = n_4$ tot en met $b = n_{2007}$) blijft n_2 onveranderd. We kunnen



vanaf die zet dus maar hooguit n_2 keer $b = n_3$ kiezen. Ergens in onze rij zetten vanaf die zet wordt $b = n_3$ dus voor de laatste keer gekozen (of überhaupt niet); vanaf de daaropvolgende zet (resp. nog steeds de eerder genoemde zet) kiezen we dus alleen nog $b = n_4$ tot en met $b = n_{2007}$. Dit argument kunnen we blijven herhalen, totdat we concluderen: ergens in onze rij zetten vanaf een zekere zet wordt $b = n_{2007}$ voor de laatste keer gekozen (of überhaupt niet). Nu waren alle andere $b = n_k$ al eerder voor de laatste keer gekozen; vanaf deze zet kan er daarom geen enkele zet $b = n_k$ meer gekozen worden en is ons spel dus afgelopen.

doen dat we niet alleen een voorbeeld uitwerken, maar dat we voor alle mogelijke begingetallen en alle mogelijke spelverlopen bewijzen dat het spel altijd stopt. In kader 1 vind je het volledige bewijs dat gebaseerd is op bovenstaand voorbeeld. Er wordt uitgegaan van een willekeurige beginrij van 2008 getallen en van een willekeurig (eindig of oneindig) spelverloop. We laten zien dat in dat spelverloop het tweede getal maar eindig vaak kan worden gekozen, en daarna hetzelfde voor het derde, vierde, etc. getal. Dan moet het gegeven willekeurige spelverloop dus wel eindig zijn.

UIT HET ONGERIJMDE Als je het bewijs in kader 1 goed bekijkt, zie je dat de gevolgde redenering eigenlijk 2005 keer moet worden herhaald (wat we gelukkig niet daadwerkelijk hebben uitgeschreven). Met iets meer techniek zouden we dat ook kunnen voorkomen. In kader 2 vind je een kort en elegant bewijs dat gebruik maakt van drie onderwerpen van de tweederondetraining (zie www.wiskunde-olympiade.nl/trt). Het bewijs gaat nu *uit het ongerijmde*. Bovendien gebruiken we het oneindige *ladenprincipe* (als je oneindig veel balletjes verdeelt over maar eindig veel laatjes, dan is ten minste één laatje gevuld met oneindig veel balletjes). En ten slotte halen we ook het *extremenprincipe* nog van stal: als er een natuurlijk getal is met een of andere eigenschap, dan is er ook een *kleinste* natuurlijk getal met die eigenschap.

BEWIJS 2: KORT MAAR KRACHTIG

We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat er een oneindige rij zetten is. Uit het (oneindige) ladenprincipe volgt dat er ten minste een zet $b = n_k$ is die oneindig vaak voorkomt. Kies nu k minimaal zodat $b = n_k$ oneindig vaak voorkomt (extremenprincipe). Het getal n_{k-1} wordt alleen maar opgehoogd (namelijk met 7) bij een zet $b = n_{k-1}$ en dat gebeurt dan maar eindig vaak. Het wordt echter oneindig vaak met 1 verlaagd, namelijk bij elke zet $b = n_k$; tegenspraak. Dus elke rij zetten is eindig.

BEWIJS 3: MET EEN POTENTIAAL

Voor elke rij van 2008 elementen $n_1, n_2, \ldots, n_{2008}$ berekenen we een gewogen som, namelijk met de gewichten $7, 7^2, 7^3, 7^4, \ldots$, dus

$$S = 7 \cdot n_1 + 7^2 \cdot n_2 + 7^3 \cdot n_3 + \cdots + 7^{2007} \cdot n_{2007} + 7^{2008} \cdot n_{2008}.$$

Als we in deze rij a, b, c vervangen door $a - 1, b + 7, c - 1$, zeg met $b = n_k$ ($2 \le k \le 2007$), dan wordt S door $S - 7^{k-1} + 7 \cdot 7^k - 7^{k+1} = S - 7^{k-1}$ vervangen, dus S wordt met elke stap kleiner. Anderzijds is S volgens zijn definitie als gewogen som van niet-negatieve gehele getallen zelf ook altijd niet-negatief. Als we na elke zet de nieuwe S opschrijven, krijgen we dus een dalende rij gehele getallen. Omdat deze getallen nooit negatief mogen worden, kan deze rij niet oneindig lang zijn. Het spel moet daarom wel stoppen.

EEN POTENTIAAL Onze rij bestaat uit niet-negatieve getallen: getallen groter dan of gelijk aan 0. De som van deze getallen is natuurlijk ook weer niet-negatief. Als het nou zo was geweest dat de som bij elk zet toch afnam, dan was het dus direct duidelijk geweest dat we het spel niet eindeloos zouden kunnen doorspelen. Maar helaas, de som neemt elke keer juist met 5 toe (zie ook de tabel).

Zouden we echter een van de buren, a of c, 7 keer zo zwaar tellen als b, dan wordt de toename van +7 bij b precies gecompenseerd door de −1 (die dan 7 keer zo zwaar wordt geteld) van a of c. Laten we daarom de volgende *gewogen som* S bekijken, waarin we het k-de getal n_k uit de rij met factor 7^k wegen (voor het gemak eerst weer even voor rijtjes van lengte 5):

$$S = 7 \cdot n_1 + 7^2 \cdot n_2 + 7^3 \cdot n_3 + 7^4 \cdot n_4 + 7^5 \cdot n_5.$$

Als we nu een zet doen met het tweede getal, dan worden in $S = S_0$ de getallen n_1, n_2 en n_3 vervangen door $n_1 - 1$, $n_2 + 7$ en $n_3 - 1$. Daarmee wordt de nieuwe waarde van de gewogen som

$$\begin{aligned} S_1 &= 7 \cdot (n_1 - 1) + 7^2 \cdot (n_2 + 7) + \\ &\quad + 7^3 \cdot (n_3 - 1) + 7^4 \cdot n_4 + 7^5 \cdot n_5 = \\ &= (7 \cdot n_1 - 7) + (7^2 \cdot n_2 + 7^3) + \\ &\quad + (7^3 \cdot n_3 - 7^3) + 7^4 \cdot n_4 + 7^5 \cdot n_5 = \\ &= S_0 - 7. \end{aligned}$$

Doen we een zet met het derde of het vierde getal, dan neemt de gewogen som zelfs af met 7^2 of 7^3. Het nuttige hiervan is dat de gewogen som S in ieder geval bij elke zet afneemt, zeg voor het gemak met minstens 1 (in feite is het met minstens 7): $S_i > S_{i+1}$. Om die reden noemen we S wel een *potentiaal* van de rij: welke zet we ook doen, de zojuist gedefinieerde potentiaal van de rij neemt altijd af. (Wie iets van natuurkunde weet, snapt waar deze naamgeving vandaan komt.)

Het mooie is dat we nóg iets kunnen zeggen over S. Bij elk (eindig of oneindig) spelverloop krijgen we na elke zet een rijtje dat bestaat uit niet-negatieve getallen (a en c moesten immers positief zijn). Als we zo'n rijtje wegen met de factoren 7, 7^2, 7^3, 7^4 en 7^5, blijft dat een niet-negatief getal. Bij elk spelverloop is na elke zet de corresponderende waarde van S dus niet-negatief. Maar dan zijn we eruit! De gewogen som S is altijd niet-negatief en neemt toch elke keer met minstens 1 af:

$$S_0 > S_1 > S_2 > \ldots \geq 0.$$

Dat kan nooit oneindig lang zo doorgaan! Zo zou je in bovenstaand voorbeeld meteen kunnen zeggen dat er hooguit 97384 zetten gedaan kunnen worden (wat een zeer ruime bovengrens is, maar goed, eindig is eindig). We hebben opnieuw een argument gevonden waarom elk spelverloop eindig is. Het volledig uitgewerkte bewijs vind je in kader 3.

NIEUWE RONDE, NIEUWE KANSEN De eerstvolgende eerste ronde van de Wiskunde Olympiade wordt op vrijdagmiddag 30 januari 2009 op scholen in heel Nederland georganiseerd. Scholen kunnen zich hiervoor opgeven door voor 20 december 2008 een e-mail te sturen aan Melanie.Steentjes@cito.nl. Mocht jouw school onverhoopt niet meedoen dit jaar en mocht je toch graag willen deelnemen, stuur dan zelf een e-mail zodat we op zoek kunnen naar een andere plek waar je de eerste ronde kunt maken. ■