Vorige maand deden een paar duizend leerlingen uit heel Nederland mee aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade: acht vijfkeuzevragen en vier open vragen. De besten uit de categorieën 'onderbouw', 'vierde klas' en 'vijfde klas' krijgen een prijs en worden bovendien uitgenodigd voor de tweede ronde in september op de Technische Universiteit Eindhoven.

■ door Julian Lyczak

NEGENS, NEGENS EN NOG MEER NEGENS

De eerste ronde van de Wiskunde Olympiade bestaat uit leuke puzzels waar je weinig schoolse wiskunde voor nodig hebt. Toch leek voor de tweede open vraag van dit jaar in eerste instantie wel heel veel rekenwerk nodig te zijn. Dit artikel gaat juist over die opgave en hoe je bij die opgave met wat creativiteit toch op de oplossing kunt komen binnen de beschikbare tijd.

Opgave B2. Het gehele getal N bestaat uit 2009 negens achter elkaar geschreven. Een computer berekent $N^3 = (99999\ldots99999)^3$. Hoeveel negens bevat het uitgeschreven getal N^3 in totaal?

EEN VERMOEDEN KRIJGEN Bij de eerste ronde wordt alleen naar het antwoord gevraagd en niet naar een bewijs of redenering. Het is dus voldoende om in de beschikbare tijd, twee uur in totaal, op het antwoord te komen, zonder een volledig bewijs te hebben. De vraag is nu: hoe doe je dat? Het vervelende aan de opgave is, dat N een ongelooflijk groot getal is en dat het daadwerkelijk uitrekenen van N^3 niet te doen is. Verder kun je je afvragen in hoeverre die 2009 nou echt iets met de opgave te maken heeft. Uiteraard is dat het jaar waarin we leven, maar zou de opgave echt lastiger worden als het getal niet uit 2009, maar uit duizend of vijf miljoen negens bestond? Dit kan je op het idee brengen om te gaan kijken hoeveel negens er in $(999\ldots999)^3$ zitten, als het getal uit een bepaald aantal, zeg k, negens bestaat. Dit wordt wel het *principe van Pólya* genoemd, naar de Hongaarse wiskundige G. Pólya (1887-1985). Dit principe zegt: 'als je iets niet kunt bewijzen, bewijs dan iets wat algemener is'.

Hoe ver komen we met Pólya in het achterhoofd? We kunnen de oplossing niet vinden voor 2009 negens, dus dan gaan we kijken of we wel iets weten voor k negens. We beginnen makkelijk: $k = 1$. Het getal dat we moeten berekenen, is $9^3 = 729$ en dat bevat 1 negen. Voor $k = 2$ moeten we 99^3 berekenen. Dit is al een stuk meer werk; het gebruik van een rekenmachine bij de olympiade is

$$n = \underbrace{99999\ldots99999}_{k\ \times}$$

$$n^3 = \underbrace{999\ldots999}_{(k-1)\ \times}7\underbrace{000\ldots000}_{(k-1)\ \times}2\underbrace{999\ldots9999}_{k\ \times}$$

immers verboden! Maar het is in ieder geval nog te doen, zeker als we 99 schrijven als 100 – 1. We berekenen eerst

$$\begin{aligned} 99^2 &= 99 \cdot (100 - 1) = \\ &= 9900 - 99 = 9801 \end{aligned}$$

en vervolgens

$$\begin{aligned} 99^3 &= 99^2 \cdot 99 = \\ &= 9801 \cdot (100 - 1) = \\ &= 980100 - 9801 = 970299. \end{aligned}$$

We krijgen nu dus een getal waarin 3 negens zitten.

We hebben nu twee gevallen bekeken, maar dat is niet genoeg om een goed vermoeden op te baseren. Daarom berekenen we ook 999^3. Met hetzelfde trucje berekenen we

$$\begin{aligned} 999^2 &= 999 \cdot (1000 - 1) = \\ &= 999000 - 999 = 998001 \end{aligned}$$

en daarna

$$\begin{aligned} 999^3 &= 999^2 \cdot 999 = \\ &= 998001 \cdot (1000 - 1) = \\ &= 998001000 - 998001 = \\ &= 997002999. \end{aligned}$$

Dus als we 999^3 uitschrijven, dan zitten er 5 negens in. Verder lijkt er een verband te zijn tussen 99^3 en 999^3: het lijkt wel alsof er bij 970299 een negen aan het begin en een negen aan het eind zijn toegevoegd en een nul tussen de twee en de zeven is gezet. Hé, dat is eigenlijk ook hoe je van $9^3 = 729$ naar $99^3 = 970299$ gaat. Hierdoor zien we zelfs de manier waarop het aantal negens met twee toeneemt als k eentje groter wordt, namelijk met een negen aan het begin en één aan het eind. Zo raken we er steeds meer van overtuigd dat er $2k - 1$ negens in het getal zitten dat we krijgen als we het getal bestaande uit k negens tot de derde macht verheffen. Dus hoogstwaarschijnlijk geldt dat in N^3 (het geval met $k = 2009$) $2 \cdot 2009 - 1 = 4018 - 1 = 4017$ negens zitten. Dit is natuurlijk geen bewijs, maar dat wordt ook niet gevraagd. We vullen 4017 in en gaan snel door met de volgende opgave.

HET BEWIJS Wat nu als deze vraag bij de tweede ronde kwam? In tegenstelling tot de eerste ronde zou je dan wel een bewijs moeten geven. Hoe pakken we dat aan? Zoals we al opmerkten, lijkt niet alleen in het *aantal* negens een regelmaat te zitten, maar ook in de *vorm*: het lijkt wel alsof het eerst $k - 1$ negens zijn, dan 1 zeven, vervolgens $k - 1$ nullen, 1 twee en ten slotte k negens. Misschien kunnen we dat zelfs bewijzen.

Met n noteren we het getal dat uit k negens bestaat. Zouden we wat opschieten door n te schrijven als $10^k - 1$? Haakjes uitwerken van n^3 levert dan:

$$(10^k - 1)^3 = 10^{3k} - 3 \cdot 10^{2k} + 3 \cdot 10^k - 1.$$

Als we bedenken dat we willen bewijzen dat n^3 begint met $k - 1$ negens en eindigt op k negens, dan willen we graag de term $10^k - 1$, voor de k negens aan het eind, krijgen. Op dezelfde manier zou de term $10^{2k+1}(10^{k-1} - 1)$, voor de $k - 1$ negens aan het begin gevolgd door $2k + 1$ nullen, zorgen. Van de term $10^k - 1$ hebben we al de 'min één' en de 10^k kunnen we verkrijgen door $3 \cdot 10^k$ op te splitsen in 10^k en $2 \cdot 10^k$. Net zo hebben we van $10^{2k+1}(10^{k-1} - 1) = 10^{3k} - 10^{2k+1}$ al de 10^{3k} en maken we zelf een 10^{2k+1} door $-3 \cdot 10^{2k}$ te schrijven als $-10 \cdot 10^{2k} + 7 \cdot 10^{2k}$. Dan krijgen we:

$$n^3 = 10^{3k} - 10 \cdot 10^{2k} + 7 \cdot 10^{2k} + 2 \cdot 10^k + 10^k - 1.$$

Laten we eens gaan kijken of er staat wat we willen. Die $10^k - 1$ geeft precies de k negens aan het eind, de $2 \cdot 10^k$ geeft dat links van die negens een twee staat. Zo geeft de $7 \cdot 10^{2k}$ dat k plekken naar links een zeven staat, daartussen staan dus $k - 1$ nullen. Als laatste hebben we nog $10^{3k} - 10 \cdot 10^{2k}$, waar we voor hadden gezorgd, omdat het gelijk is aan $10^{2k+1}(10^{k-1} - 1)$, zodat er $k - 1$ negens precies voor die zeven komen.

We hebben nu bewezen: het getal bestaande uit k negens tot de derde macht, is het getal dat achtereenvolgens bestaat uit $k - 1$ negens, 1 zeven, $k - 1$ nullen, 1 twee en aan het eind k negens. Het totale aantal negens is dus $2k - 1$; precies wat we vermoedden! ■