Op weg naar IMO2011

IMO2008 - OPGAVE 5

[Floris van Doorn]

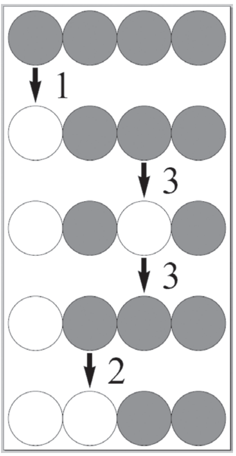
Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

In 2008 werd de IMO in Spanje gehouden. Op deze olympiade vertegenwoordigde ik Nederland, samen met vijf anderen. We hadden hiervoor al het hele jaar getraind, dus we gingen met goede moed en vol vertrouwen naar Madrid. We waren zelfs een week eerder naar Madrid gegaan om daar nog een week te trainen. Dit deden we samen met het Nieuw-Zeelandse team. Dit was een heel leuke ervaring: we leerden het team van Nieuw-Zeeland goed kennen en we kregen ook opdrachten waarmee we samen met een Nieuw-Zeelander aan de slag moesten. Hierna begon de IMO zelf. Na de openingsceremonie kregen we, verspreid over twee dagen, 9 uur de tijd om 6 opgaven op te lossen. In dit artikel zal ik opgave 5 bespreken.

De opgave

Laat gehele getallen $n > 0$ en $k > 0$ gegeven zijn met $k \geq n$ en $k - n$ even. We hebben $2n$ lampen genummerd van 1 tot en met $2n$. Elke lamp kan aan of uit zijn. In het begin zijn alle lampen uit. We bekijken rijtjes van handelingen: bij elke handeling wordt ofwel een lamp die aan is, uit gedaan, ofwel een lamp die uit is, aan gedaan.
Zij N het aantal van zulke rijtjes die uit k handelingen bestaan en die eindigen in de toestand waarin de lampen $1, \ldots, n$ aan zijn en de lampen $n + 1, \ldots, 2n$ uit zijn.
Zij M het aantal van zulke rijtjes die uit k handelingen bestaan en die eindigen in de toestand waarin de lampen $1, \ldots, n$ aan zijn en de lampen $n + 1, \ldots, 2n$ uit zijn, maar waarbij geen van de lampen $n + 1, \ldots, 2n$ ooit werd aan gedaan.
Bepaal de verhouding N/M.

Dit is een typische *combinatoriekopgave*, omdat naar de verhouding tussen twee aantallen wordt gevraagd. Dat wil niet zeggen dat we ook per se die getallen N en M hoeven uit te rekenen; als we maar op een of andere manier de verhouding N/M kunnen berekenen. Bij combinatoriek-opgaven helpt het vaak om kleine voorbeeldjes uit te werken, zodat we een idee krijgen voor de opgave. Ook kunnen we hierdoor al een vermoeden krijgen wat de verhouding N/M is.
Dus laten we een voorbeeld bekijken, bijvoorbeeld $n = 2$ en $k = 4$. Dan hebben we $2n = 4$ lampjes, en mogen we $k = 4$ handelingen doen. Nu is N het aantal manieren waarop we deze handelingen kunnen doen, zodat de eerste twee lampjes aan zijn, en de laatste twee uit. We kunnen bijvoorbeeld lampje 1 aan doen, dan lampje 3 aan doen, dan lampje 3 uit doen, en dan lampje 2 aan doen, zoals ***in figuur 1***. Dit kunnen we korter noteren met het rijtje (1, 3, 3, 2).



figuur 1 Het rijtje (1, 3, 3, 2)

We noemen de rijtjes die we voor N meetellen, N-rijtjes, en de rijtjes die we voor M meetellen, M-rijtjes.
In N-rijtjes moeten de getallen $1, \ldots, n$ een oneven aantal keer voorkomen, en de getallen $n + 1, \ldots, 2n$ een even aantal keer.
Bij M-rijtjes moeten de getallen $1, \ldots, n$ ook een oneven aantal keer meedoen, maar de getallen $n + 1, \ldots, 2n$ mogen niet voorkomen.
Dus: elk M-rijtje is ook een N-rijtje.
In het geval $n = 2$ en $k = 4$ hebben de M-rijtjes dus ofwel 3 enen en 1 twee – zoals (1, 1, 2, 1) – of 3 tweeën en 1 één – zoals (2, 1, 2, 2). Dit kan in het totaal op 8 manieren. Dit zijn ook allemaal N-rijtjes, maar er zijn ook N-rijtjes die bestaan uit een 1, een 2, en ofwel 2 drieën, ofwel 2 vieren.
Om het aantal manieren te tellen kunnen we de 1 op 4 plaatsen zetten. Daarna kan de 2 nog op 3 plaatsen, en de overige 2 plaatsen zijn ofwel 2 drieën, ofwel 2 vieren. Dus in het totaal zijn er $4 \cdot 3 \cdot 2 =$ 24 manieren, zodat $N = 24 + 8 = 32$. De verhouding is nu:
$N/M = 32/8 = 4$

Zoals al eerder gezegd, moeten in N-rijtjes de getallen $1, \ldots, n$ een oneven aantal keer staan, en de getallen $n + 1, \ldots, 2n$ een even aantal keer. Dus als we de lampjes $1, \ldots, n$ allemaal een keer schakelen, weten we dat we daarna elk lampje nog een even aantal keer moeten schakelen. Hiervoor moet k dus gelijk zijn aan n zijn *plus* een even getal. Dat verklaart dus de voorwaarden die aan het begin van de opgave staan: $k \geq n$ en $k - n$ even.
Als er niet aan deze voorwaarden voldaan is, zijn er geen N-rijtjes, en al helemaal geen M-rijtjes. In dat geval is $N = M = 0$. Dan kunnen we de verhouding natuurlijk niet bepalen.

Laten we nog een paar simpele gevallen bekijken.
Als $n = 1$, dan hebben we twee lampjes, en omdat $k - n$ even is, is k dus oneven. Er is maar één M-rijtje, namelijk het rijtje met k

enen. Dus $M = 1$.
Alle N-rijtjes hebben een oneven aantal enen en een even aantal tweeën. In het totaal zijn er 2^k rijtjes met enen en tweeën, en precies de helft daarvan heeft een oneven aantal enen. Dit laatste kunnen we als volgt zien: elk rijtje heeft óf een oneven aantal enen, óf een oneven aantal tweeën (en niet beide). Er zijn natuurlijk evenveel rijtjes met een oneven aantal enen als rijtjes met een oneven aantal tweeën, en in totaal 2^k rijtjes, dus er zijn 2^{k-1} rijtjes met een oneven aantal enen. Dus hier geldt:
$N/M = 2^{k-1}$

In het geval dat $k = n$, moeten we alle k handelingen gebruiken om de eerste n lampjes aan te krijgen. Dus kunnen ook de N-rijtjes niet de getallen $n + 1$ tot en met $2n$ bevatten. Alle rijtjes die geteld worden bij M, worden dus ook geteld bij N; dus $N = M$ en:
$N/M = 1$

Hier kreeg ik het vermoeden dat $N/M = 2^{k-n}$.
Dit vond ik de 'makkelijkste' formule die geldt voor alle gevallen die we hebben behandeld.
Maar dat moeten we nu nog wel bewijzen. We moeten in feite laten zien dat er per M-rijtje 2^{k-n} N-rijtjes zijn. Dit zouden we kunnen doen door aan elk M-rijtje 2^{k-n} N-rijtjes te koppelen, op zo'n manier dat elk N-rijtje precies één keer wordt gekoppeld.
We zagen al dat elk M-rijtje een N-rijtje is. Maar hoe kunnen we van een N-rijtje juist een M-rijtje maken? In een N-rijtje kunnen de getallen $n + 1, \ldots, 2n$ zitten die niet thuis horen in M-rijtjes. We willen die getallen dus eigenlijk kwijt.
Stel dat we van al die getallen gewoon n afhalen. Dus voor bijvoorbeeld $n = 4$, $k = 12$ koppelen we aan het N-rijtje (3, 2, 6, 1, 3, 3, 2, 5, 6, 5, 2, 4) het M-rijtje (3, 2, 2, 1, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 4): alle vijven vervangen we door enen, en de zessen door tweeën (en de zevens door drieën en achten door vieren, maar die komen niet voor in dit voorbeeld).
In dit geval wordt dit duidelijk een M-rijtje, maar is dat altijd het geval? Ja, want in een N-rijtje komen de getallen $1, \ldots, n$ een oneven aantal keer voor en de getallen $n+1, \ldots, 2n$ een even aantal keer. Dus na onze operatie komen de getallen $1, \ldots, n$ nog steeds een oneven aantal keer voor (oneven + even = oneven), en alle getallen groter dan n hebben we weggehaald. Dus dit is een M-rijtje.

Zo koppelen we in ieder geval aan elk N-rijtje precies één M-rijtje. Maar wordt elk M-rijtje wel aan 2^{k-n} N-rijtjes gekoppeld? Stel we hebben het M-rijtje, zoals hierboven: (3, 2, 2, 1, 3, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 4). De N-rijtjes waaraan deze gekoppeld is, hadden misschien vijven, zessen en zevens waar dit rijtje enen, tweeën en drieën heeft (er is maar 1 vier, dus er zitten geen achten in). We weten wel dat dit een even aantal vijfen, zessen en zevens (en achten) moet zijn. Dus de vraag is nu: op hoeveel manieren kunnen we een even aantal enen door vijven vervangen, een even aantal tweeën door zessen, en een even aantal drieën door zevens?
Laten we dit algemeen doen: we hebben een M-rijtje met a_1 enen, a_2 tweeën, … en a_n n-en.
Voor elke i moeten we nu een even aantal van de i's (waarvan we er a_i hebben, een oneven aantal) vervangen door $n + i$. Het aantal manier waarop dit kan, is eigenlijk hetzelfde probleem als het probleem dat we hierboven hebben opgelost bij het bepalen van het aantal N-rijtjes voor $n = 1$. Daar moesten we rijtjes van lengte k vinden met een oneven aantal enen (en dus een even aantal tweeën). Hier moeten we uit a_i getallen er een even aantal kiezen om n op te hogen. Dus dit kan op 2^{a_i-1} manieren, net zoals we toen 2^{k-1} N-rijtjes hadden.
Dus voor alle i's samen hebben we $2^{a_1-1} \cdot 2^{a_2-1} \cdot \ldots \cdot 2^{a_n-1}$ manieren. Dit kunnen we ook schrijven als
$2^{(a_1-1)+(a_2-1)+(a_3-1)+\ldots+(a_n-1)}$.
Merk op dat de som van de a_i gelijk is aan de lengte is van het M-rijtje, dus aan k, en dat we er n keer 1 vanaf halen. Dus dit aantal is 2^{k-n}.
Dus elk M-rijtje wordt precies aan 2^{k-n} N-rijtjes gekoppeld, op zo'n manier dat aan elk N-rijtje precies één M-rijtje gekoppeld wordt. Nu moeten er dus wel 2^{k-n} keer zoveel N-rijtjes zijn, oftewel:
$N/M = 2^{k-n}$
Hiermee hebben we het probleem opgelost!

Deze opgave hadden drie van de zes deelnemers van het Nederlandse team opgelost, wat vrij veel is voor een opgave 5. Ook verder hadden we het dat jaar erg goed gedaan: we wonnen twee zilveren en twee bronzen medailles, en Nederland eindigde op de 33e plek van de 97 landen die meededen. Dat is voor Nederland een erg goede prestatie.
Dit proberen we vol te houden en nog te verbeteren. Voor de IMO2011, die door Nederland wordt georganiseerd, is ons doel om in de top 30 te komen.

Info
Website 2011: *www.imo2011.nl*

Over de auteur
Floris van Doorn is derdejaars student wiskunde en natuur- en sterrenkunde aan de Universiteit Utrecht. Hij is in 2007 als 'winnaar aanmoedigingsprijs' naar de IMO in Vietnam en in 2008 naar de IMO in Spanje geweest. Daar heeft hij een zilveren medaille gehaald.
Verder is hij sinds 2009 betrokken bij de training van Nederlandse deelnemers aan de IMO.
E-mailadres: *florisvandoorn@hotmail.com*