Op weg naar IMO2011

IMO2005 - OPGAVE 4

[Sietske Tacoma]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

In de zomer van 2005 zat ik, samen met vijf anderen, in het Nederlandse team voor de IMO in Mérida in Mexico. Voor de derde keer zaten er twee meisjes in het Nederlandse team en een medaille voor een meisje moest er nu maar eens van komen, vonden we. Van de zes opgaven die we voorgeschoteld kregen, wist ik er één volledig op te lossen. Het aantal punten dat ik had, was uiteindelijk, net als voor twee meisjes die eerder mee waren geweest, één punt te weinig voor een bronzen medaille. Toch was ik erg blij dat ik een opgave had opgelost. Dat vindt men namelijk op een IMO al zo'n goede prestatie dat er een eervolle vermelding tegenover staat. De opgave die ik heb opgelost, zal ik in dit artikel bespreken.

De opgave

Beschouw de rij $a_1, a_2, \dots$ die gegeven is door:
$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ (met $n = 1, 2, \dots$)
Bepaal alle positieve gehele getallen, die relatief priem zijn met iedere term van de rij.

Het eerste wat ik wilde doen bij het zien van deze opgave, is de eerste termen van de rij uitschrijven, om te kijken hoe die getallen eruit zagen. De eerste vijf termen zijn: $a_1 = 10$, $a_2 = 48$, $a_3 = 250$, $a_4 = 1392$ en $a_5 = 8050$. De getallen worden snel groter en moeilijker uit te rekenen zonder rekenmachine. Om hier wat zinnigs over te kunnen zeggen is het een goed idee om beter te bekijken waar precies om wordt gevraagd.

Er wordt gevraagd naar positieve gehele getallen die relatief priem zijn met alle termen in de rij. Twee getallen zijn *relatief priem*, als geen van de priemfactoren van het ene getal ook een priemfactor is van het andere getal. Dit betekent dat bijvoorbeeld de getallen 2, 5 en 10 al afvallen, omdat deze getallen allemaal één of meer priemfactoren gemeen hebben met $a_1 = 10$. Maar dan kunnen alle veelvouden van 2 ook niet meer, want die hebben ook een priemfactor met 10 gemeen. Net zo vallen alle veelvouden van 5 af, want ook die zijn niet relatief priem met 10.
Als een priemgetal dus een deler is van een term in de rij, dan valt dit priemgetal af, samen met al zijn veelvouden. Deze veelvouden hebben immers allemaal een priemfactor gemeen met minstens één term in de rij. Samengestelde getallen die relatief priem zijn met alle termen in de rij, kunnen dus alleen maar zijn samengesteld uit priemfactoren die relatief priem zijn met alle termen van de rij. Daarom kunnen we ons eerst beperken tot zoeken naar priemgetallen die relatief priem zijn met alle termen van de rij.
Voor priemgetallen is het makkelijker om vast te stellen of ze relatief priem zijn met andere getallen. Als een priemgetal p en een ander getal a niet relatief priem zijn, dan heeft a een priemfactor p, dus is a deelbaar door p. We zijn dus op zoek naar priemgetallen waardoor geen enkele term in de rij deelbaar is.
Als we nu eens kijken naar de eerste vijf termen van de rij, dan zien we dat a_1 en a_3 deelbaar zijn door de priemgetallen 2 en 5, a_2 door 2 en 3, a_4 door 2, 3 en 29 en a_5 door 2, 5, 7 en 23. De vier kleinste priemgetallen vallen dus al af. Bij het maken van zo'n opgave is dat het moment waarop je begint te hopen dat alle priemgetallen afvallen, dus dat er voor elk priemgetal p wel een term in de rij is die deelbaar is door p.
Om dat te bewijzen hebben we een goed idee nodig. Nu begint de rij bij a_1. Maar we kunnen ook eens kijken wat er gebeurt als we terug gaan rekenen. Wat zou a_0 zijn? En wat a_{-1}?
Dit principe van 'thinking out of the box' is mij aangeleerd door onze begeleider. In het vliegtuig op de heenreis moedigde hij ons aan stout en ondeugend te zijn, want stoute en ondeugende jongens en meisjes lossen meer problemen op dan brave en nette jongens en meisjes. Dat betekent dat het geen probleem is om de 'regels' van de opgave te overtreden om goede ideeën te krijgen, zolang je je voor de uiteindelijke oplossing maar wél aan de regels houdt.
Terug naar de opgave: het plan was om a_0 uit te rekenen. Dat geeft ons:
$a_0 = 1+1+1-1 = 2$
Dit levert weinig op, dus gaan we nóg een stapje terug:
$a_{-1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-1 = 0$
Toen ik hier tijdens de wedstrijd achter kwam, had ik het idee dat dit een hint kon zijn in de richting van een goede oplossing. Daarnaast heb ik nog eens goed gekeken of de rij inderdaad bij a_1 begon en niet bij a_{-1}. Dan was ik klaar geweest, 0 is immers deelbaar door elk getal, dus dan zou er geen enkel priemgetal relatief priem zijn met elk getal in de rij. In de opgave stond echter dat de rij écht bij a_1 begon, dus er moest nog wat gebeuren.
Om een volgende stap te maken gaan we op zoek naar stellingen die ons kunnen helpen. Ik mag dan volgens de opgave niet naar getallen tot de macht -1 kijken, maar wel naar getallen tot de macht $(p-1)$, met p een willekeurig priemgetal. En daar helpt de *Kleine stelling van Fermat* ons verder. Deze stelling luidt:
Zij p een priemgetal en n een natuurlijk getal dat niet deelbaar is door p. Dan geldt:
$n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ Met behulp van deze stelling vinden we voor a_{p-1} het volgende:

$$\begin{aligned} a_{p-1} &= 2^{p-1}+3^{p-1}+6^{p-1}-1 \\ &\equiv 1+1+1-1 \equiv 2 \pmod p \quad \text{voor } p>3. \end{aligned}$$

Dit helpt ons niet verder. Maar we hadden eerder wel gevonden dat $a_0 = 2$ en toen hielp het om nog een stapje terug te gaan. Dat kunnen we hier ook doen, dan vinden we:

$$a_{p-2} = 2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1$$

Om hierover meer te kunnen zeggen met de Kleine stelling van Fermat kunnen we dit schrijven als:

$a_{p-2} = 2^{p-1} \cdot 2^{-1} + 3^{p-1} \cdot 3^{-1} + 6^{p-1} \cdot 6^{-1} - 1$

want dan vinden we dat:

$a_{p-2} \equiv 2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} - 1 \pmod p$

Om niet te hoeven rekenen met breuken modulo p kunnen we de vergelijking met 6 vermenigvuldigen. Voor $p > 3$ staat er dan modulo p:

$$\begin{aligned} 6 \cdot a_{p-2} &\equiv 3 \cdot 2^0 + 2 \cdot 3^0 + 6^0 - 6 \\ &\equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 \end{aligned}$$

Dat betekent dat $6a_{p-2}$ deelbaar is door p voor alle priemgetallen p groter dan 3. Omdat p geen deler is van 6, is dan a_{p-2} deelbaar door p. Dit is een belangrijk resultaat voor het oplossen van de opgave!

Om te kunnen vaststellen of we geen foutjes hebben gemaakt, is het een goede gewoonte het resultaat te controleren voor een paar kleine gevallen. Omdat p groter moet zijn dan 3, kunnen we controleren of a_3 deelbaar is door 5; dat is het geval. We hebben ook gezien dat a_5 deelbaar is door 7, dus ook voor het priemgetal 7 klopt ons resultaat.

We concluderen dat geen van de priemgetallen groter dan 3 voldoet; elk priemgetal p groter dan 3 heeft een veelvoud in de rij, namelijk a_{p-2}. Ook van 2 en 3 hadden we al vastgesteld dat ze niet voldeden. Omdat geen enkel priemgetal voldoet, voldoet ook geen enkel samengesteld getal.

Momenteel hebben we zes van de maximaal zeven punten binnen voor deze opgave. Het zevende punt krijgen we door het *goede antwoord* te geven. Er is namelijk wél een getal dat relatief priem is met alle termen in de rij. Dat getal is het getal dat geen enkele priemfactor heeft: het getal 1.

Dus: 1 is het enige getal is dat relatief priem is met elke term in de gegeven rij. En daarmee hebben we de opgave opgelost.

Wat ik leuk vind aan deze opgave, en aan opgaven van de IMO in het algemeen, is dat je geen enorm ingewikkelde stellingen nodig hebt om de opgave te bewijzen.

Er komt wat voorkennis bij kijken: over modulo-rekenen, deelbaarheid en de Kleine stelling van Fermat. Dit zijn onderwerpen die ik tegenwoordig als trainer uitleg aan de leerlingen die nu in de race zijn voor het Nederlandse team. Daarin leer ik de leerlingen, samen met mijn medetrainers, ook dat het bij olympiade-opgaven minstens zo belangrijk is om creatief te zijn, zoals bijvoorbeeld in *mijn* opgave door te kijken naar a_{p-2}. Díe creatieve inzichten zijn wat de olympiade voor mij nog steeds zo leuk en uitdagend maakt!

Over de auteur

Sietske Tacoma zat in 2004 en 2005 in het Nederlandse team voor de IMO. Sinds november 2007 is ze betrokken bij de training van de nieuwe kandidaten voor het team. In de zomer van 2011 zal ze vice-teamleider van het Nederlandse team zijn. In 2010 is ze, om ervaring op te doen, al mee geweest naar de IMO in Kazachstan. Daarnaast is ze meerdere keren betrokken geweest bij de Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade (LIMO), als deelnemer, corrector en in 2010 als organisator. Ze is bijna klaar met haar master *Research and Development in Science Education* aan de Universiteit Utrecht.

E-mailadres: *sietsketacoma@gmail.com*