Op weg naar IMO2011

IMO2004 – OPGAVE 1

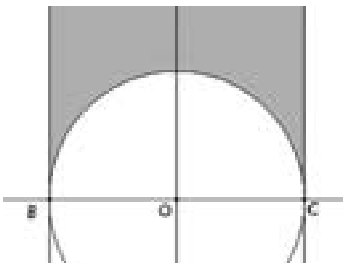
[Johan Konter]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

In 2004 deed ik voor het eerst mee met de IMO, in Athene. De eerste dag was een dag reizen, en die bestond vooral uit veel wachten en drie uur vliegen. De tweede dag is er nog wat geoefend en was de officiële opening. De derde dag was het dan eindelijk zo ver, de wedstrijd begon. Ik bespreek hier de opgave waarover ik me die morgen als eerste zou buigen, net als 485 andere scholieren. Tóen heb ik deze opgave niet opgelost, maar een paar weken geleden heb ik het opnieuw geprobeerd en wel een oplossing gevonden. Ik gun u een klein inzicht in mijn gedachten en neem u mee in de trein van ideeën zoals die ongeveer door mijn hoofd denderde.

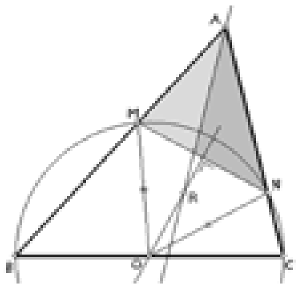
De opgave
Laat ABC een scherphoekige driehoek zijn met $|AB| \neq |AC|$. De cirkel met middellijn BC snijdt de zijden AB en AC in respectievelijk M en N. Het midden van BC noemen we O. Het snijpunt van de bissectrice van $\angle BAC$ en de bissectrice van $\angle MON$ noemen we R.
Bewijs dat de omgeschreven cirkels van ΔBMR en ΔCNR een gemeenschappelijk punt hebben dat op het lijnstuk BC ligt.

Bij meetkunde is het belangrijk een plaatje te maken, waardoor je je kan laten leiden om tot een bewijs te komen. Laten we daarmee dan maar beginnen.
Een willekeurige driehoek tekenen is echter niet makkelijk. Je eindigt bijna altijd met een driehoek die óf bijna rechthoekig is, óf gelijkbenig. Als we ook de tweede zin van de opgave lezen, voordat we een plaatje maken, dan zien we dat daarin een hint wordt gegeven om het plaatje anders te beginnen. Laten we dus beginnen met een cirkel met middelpunt O en een willekeurige middellijn waarvan we de eindpunten B en C noemen. Die middellijn tekenen we voor het gemak horizontaal. Nu kunnen we A heel makkelijk kiezen zodat we aan alle eisen voldoen. Als we A tussen de twee verticale lijnen door B en C kiezen én buiten de cirkel (***zie figuur 1***), dan is driehoek ABC automatisch scherphoekig.



figuur 1

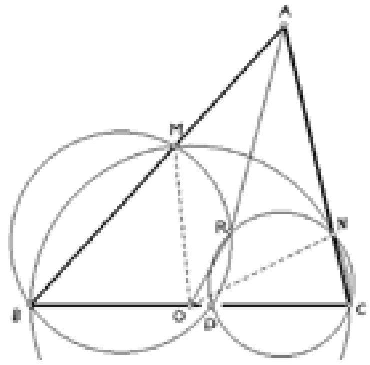
We maken hierbij gebruik van een uitbreiding op de *stelling van Thales*. Deze stelling zegt dat $\angle BAC = 90°$ dan en slechts dan als A op de cirkel met middellijn BC ligt. De uitbreiding zegt dat $\angle BAC > 90°$ als A binnen de cirkel ligt en dat $\angle BAC < 90°$ als A buiten de cirkel ligt. Als we ook zorgen dat A niet in de buurt ligt van de verticale lijn door O, dan is het ook duidelijk dat $|AB| \neq |AC|$. Als we het punt A kiezen, dan krijgen we meteen een M en een N. Op de IMO zitten de opgaven meestal wel goed in elkaar, dus verwachten we dat alle eisen en restricties nodig zijn. En hier zien we dat driehoek ABC scherphoekig is om ervoor te zorgen dat M tussen A en B ligt en N tussen A en C. Dat verklaart waarom die eis is opgenomen in de opgave.
Iets wat mij nu meteen opvalt is dat $\angle MNA = 180° - \angle MNC = \angle ABC$ en dat $\angle NMA = 180° - \angle NMB = \angle ACB$, beide wegens de stelling dat overstaande hoeken in een koordenvierhoek samen 180° zijn. Dit betekent dat $\Delta ANM \sim \Delta ABC$, een resultaat dat wel vaker nuttig is.
Als we verdergaan met het tekenen van de bissectrices, kunnen we meteen opmerken waarom we de tweede restrictie, $|AB| \neq |AC|$, nodig hebben. Deze zorgt ervoor dat de bissectrices van de hoeken BAC en MON niet evenwijdig lopen, en dus ook niet samenvallen.



figuur 2

Om dit in te zien tekenen we de vierhoek $AMON$ waarbij we in gedachten houden dat $|MO| = |NO|$, omdat het allebei stralen zijn van de cirkel met middellijn BC.
Dit betekent dat driehoek MON gelijkbenig is en dat de bissectrice van $\angle MON$ loodrecht op de diagonaal MN staat en deze middendoor deelt. Als de bissectrices evenwijdig zouden zijn, zou de bissectrice van $\angle MAN$ ook loodrecht op MN moeten staan. Wegens gelijke hoeken en een gemeenschappelijke zijde zouden de twee driehoeken waarin driehoek MAN wordt verdeeld (***zie figuur 2***), congruent zijn en dit betekent dat $|MA| = |NA|$. Omdat we al gezien hebben dat $\Delta ANM \sim \Delta ABC$, zou $|MA| = |NA|$ inhouden dat $|AC| = |AB|$, wat in tegenspraak is met ons gegeven.
Nu we hebben gezien dat de bissectrices

precies één snijpunt hebben, kunnen we het punt R dus gerust tekenen. We maken de tekening af door de omgeschreven cirkels van de driehoeken BMR en CNR te tekenen; ***zie figuur 3***.

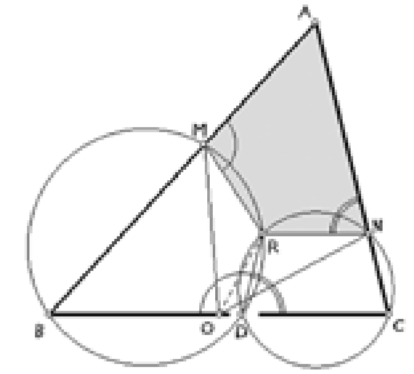


figuur 3

Tot nu toe hebben we alleen nog maar een tekening gemaakt. Maar door goed na te denken tijdens (en voorafgaand aan) het tekenen hebben we ook al wat mysteries uit de opgave ontrafeld en hebben we ondertussen een redelijk idee wat er met de opgave moet gebeuren. Als je dit in het eerste half uur van de wedstrijd doet, is het een mooi moment om nog vragen te stellen. In het eerste half uur mag je namelijk vragen stellen over definities en dingen die onduidelijk zijn. Natuurlijk wordt er in de antwoorden nooit iets weggegeven van de oplossing.

Omdat we nu al wat gepuzzeld hebben met de bissectrices, maar het nog steeds niet duidelijk is wat we met dat snijpunt R moeten, beginnen we eerst maar eens terug te werken vanaf het eind: hoe gaan we laten zien dat het tweede snijpunt van de omgeschreven cirkels van de driehoeken BMR en CNR op het lijnstuk BC ligt?

Laten we dit snijpunt van de omgeschreven cirkels van die driehoeken eerst maar eens een naam geven, zeg D. Eigenlijk moeten we dan gewoon laten zien dat B, D en C op één lijn liggen. We hebben hiervoor heel veel technieken, maar de meest traditionele en makkelijkste manier is wel om te bewijzen dat $\angle BDC = 180°$. En omdat $BDRM$ en $CDRN$ per definitie koordenvierhoeken zijn en we dan altijd wel wat kunnen zeggen over hoeken, lijkt dit helemaal geen slecht idee.



figuur 4

We kijken nog eens goed naar het plaatje (***in figuur 4***) en zien dat:

$$\begin{aligned}\angle BDC &= \angle BDR + \angle RDC\\ &= (180° - \angle RMB) + (180° - \angle CNR)\\ &= \angle AMR + \angle RNA\end{aligned}$$

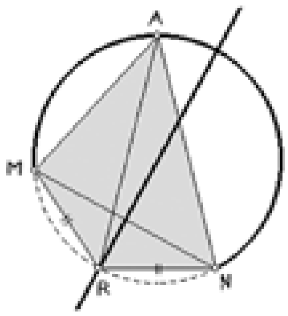
Dat betekent dat $\angle BDC = 180°$ dan en slechts dan als $\angle AMR + \angle RNA = 180°$. Oftewel B, D en C liggen op één lijn dan en slechts dan als $AMRN$ een koordenvierhoek is.

Kijk, daar hebben we wat aan. Nu weten we wat we met R moeten: *bewijzen dat AMRN een koordenvierhoek is.*

Dit kunnen we op twee manieren doen.

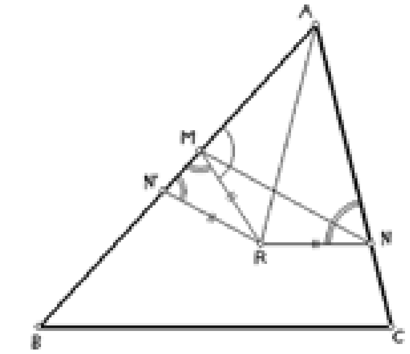
De *eerste* manier is op te merken dat $|OM| = |ON|$ en dat $\angle MOR = \angle RON$, waaruit we kunnen afleiden dat $\Delta MOR \cong \Delta NOR$, en dus $|MR| = |NR|$. Als we dit combineren met $\angle MAR = \angle RAN$, lijkt het erop dat we kunnen concluderen dat $AMRN$ een koordenvierhoek is.

Helaas is klopt dit *alleen* als deze eigenschap *andersom* geformuleerd is: als in een koordenvierhoek $AMRN$ geldt dat $\angle MAR = \angle RAN$, dan geldt $|MR| = |NR|$.



figuur 5

We kijken bij gegeven M, N en R met $|MR| = |NR|$ naar de verzameling van punten A waarvoor geldt dat $\angle MAR = \angle RAN$. Deze verzameling blijkt te bestaan uit een deel van de omgeschreven cirkel van driehoek MNR, maar *ook* alle punten op de middelloodlijn van MN voldoen (***zie figuur 5***). Dit suggereert al dat het laatste stukje toch iets lastiger is dan het oorspronkelijk leek.



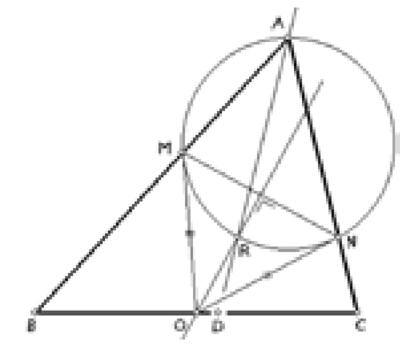
figuur 6

De elegantste manier om dit op te lossen is te kijken naar het spiegelbeeld van N in AR dat we N' noemen (***zie figuur 6***). Omdat we bij het tekenen al hadden gevonden dat $|AM| \neq |AN|$, vallen M en N' niet samen. Omdat $\angle MAR = \angle RAN$ liggen A, M en N' op één lijn. Hierbij nemen we aan dat N' tussen B en M ligt, anders draaien we gewoon M en N om. We weten dat $|MR| = |NR| = |N'R|$; dus is driehoek MRN' een gelijkbenige driehoek met top R. Nu zien we dat:

$$\begin{aligned}&\angle AMR + \angle RNA =\\ &\quad = \angle AMR + \angle RMN' = 180°\end{aligned}$$

En dus is $AMRN$ een koordenvierhoek.

De *tweede* manier maakt gebruik van het feit dat de bissectrice van $\angle MON$ het lijnstuk MN loodrecht middendoor deelt, iets dat we tijdens het tekenen al opgemerkt hebben (***zie figuur 7***). Dat betekent dat R het snijpunt is van de middelloodlijn van MN en de bissectrice van $\angle MAN$, waarvan we weten dat ze niet samenvallen.



figuur 7

Maar we weten al waar deze twee lijnen elkaar snijden: als we kijken naar de omgeschreven cirkel van driehoek AMN, gaan deze twee lijnen namelijk allebei door het midden van de boog MN waarop A *niet* ligt. De lijnen snijden elkaar dus op de omgeschreven cirkel van driehoek AMN. En dus is $AMRN$ is een koordenvierhoek.

Met deze twee manieren van bewijzen dat *AMRN* een koordenvierhoek is, zijn we aan het einde gekomen van mijn betoog. Het kan dan echter nooit kwaad een en ander nog eens goed na te lezen om te kijken of je wel precies hebt bewezen wat gevraagd werd. Op de IMO in 2004 schijnen er behoorlijk wat deelnemers te zijn geweest die een puntje hebben misgelopen omdat ze *wel* hadden bewezen dat het snijpunt van de cirkels op de lijn *BC* lag, maar *niet* dat dit punt *tussen B* en *C* lag.

Voor de lezers die ondertussen de smaak te pakken hebben: jullie kunnen blijven zitten; we zijn nog niet op het eindstation van deze trein. Er zijn namelijk nog twee aardige wetenswaardigheden. Ten eerste is *R* het middelpunt van de ***in***geschreven cirkel van driehoek *MON* en ten tweede gaat de bissectrice van $\angle BAC$ door *D*, het gemeenschappelijke punt van de twee cirkels met *BC*. Deze feitjes staan los van elkaar en het zijn allebei leuke puzzels.
Veel plezier nog. Dit is mijn halte, ik stap er hier uit.

Over de auteur
Johan Konter heeft in 2004 en 2005 meegedaan aan de Internationale Wiskunde Olympiade en is sinds 2007 betrokken bij de training van de nieuwe talenten. In 2007 heeft hij de Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade georganiseerd en vorig jaar was hij een van de organisatoren van de eerste Benelux Wiskunde Olympiade. Hij studeert wiskunde aan de Universiteit Utrecht en zal tijdens de IMO2011 in Nederland teamleider zijn van het Nederlandse team.
E-mailadres: *konter@gmail.com*