Op weg naar IMO2011

IMO2003 – OPGAVE 1

[Esther Bod]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van *Euclides* elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.

In 2002 en 2003 heb ik deelgenomen aan de Internationale Wiskunde Olympiade. Mijn eerste deelname, in Glasgow, was een erg leuke en bijzondere ervaring, maar ondanks een goede voorbereiding bleek het niveau van de opgaven voor mij iets te hoog gegrepen. Na een leerzame en gezellige training mocht ik in 2003 opnieuw meedoen. Deze keer ging de reis helemaal naar Tokio, wat het natuurlijk extra leuk maakte. Ik was vastbesloten meer punten te halen dan het jaar ervoor, en misschien zelfs een eervolle vermelding voor een volledig correct opgeloste opgave. De olympiade begon met een opgave die me wel leek te liggen.

De opgave

Laat S de verzameling $\{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$ zijn, en laat A een deelverzameling van S zijn met precies 101 elementen.
Bewijs dat er in S getallen $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ bestaan zodat de verzamelingen $A_j = \{t_j + a \mid a \in A\}$ voor $j = 1, 2, \ldots, 100$ onderling disjunct zijn.

Ter herinnering, verzamelingen zijn disjunct als geen enkel getal in twee of meer van die verzamelingen voorkomt.
We kunnen ons A_j voorstellen als een kopie van A, maar dan 'verschoven' over t_j. We moeten dus 100 van zulke verschoven kopieën van A vinden, zodat ieder getal in hoogstens één kopie ligt.

Voorbeeld 1

We bekijken eerst een klein voorbeeld. Dat helpt vaak om meer inzicht te krijgen in de opgave, en om een idee voor de aanpak van het algemene probleem op te doen.
In plaats van een verzameling S met 1 000 000 elementen gaan we voor S uit van een verzameling met 10 elementen: $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Voor A gaan we uit van een verzameling met 4 elementen: $A = \{2, 4, 6, 8\}$. De verzameling A_j bestaat dan uit $t_j + 2$, $t_j + 4$, $t_j + 6$ en $t_j + 8$. Laten we gewoon proberen een aantal t_j's te kiezen, en kijken hoeveel we er kunnen vinden zodat de verzamelingen A_j disjunct zijn. Om te beginnen kiezen we $t_1 = 1$. Dan is $A_1 = \{3, 5, 7, 9\}$. We willen dat A_2 geen elementen hiermee gemeenschappelijk heeft. Dat gaat zeker goed als A_2 alleen grote getallen bevat. Daarom kiezen we t_2 zo groot mogelijk: $t_2 = 10$. Dan krijgen we $A_2 = \{12, 14, 16, 18\}$.
Voor t_3 proberen we gewoon de kleinste mogelijkheid: $t_3 = 2$. Dan is $A_3 = \{4, 6, 8, 10\}$. Dit mag, want A_3 is nu disjunct met zowel A_1 als A_2.
Wat kunnen we nu nog kiezen voor t_4? Als we $t_4 = 3$ kiezen, is $A_4 = \{5, 7, 9, 11\}$; dus dan zijn A_1 en A_4 niet disjunct. Hetzelfde geldt voor $t_4 = 5$ en $t_4 = 7$. Als we $t_4 = 4$, $t_4 = 6$ of $t_4 = 8$ kiezen, zijn A_3 en A_4 niet disjunct. We kunnen wel $t_4 = 9$ kiezen: $A_4 = \{11, 13, 15, 17\}$ is disjunct met A_1, A_2 en A_3. Iedere keuze voor t_5 levert nu een verzameling op die niet disjunct is met A_1, A_2, A_3 of A_4.

Voorbeeld 2

We bekijken nog een ander voorbeeld: $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en $A = \{1, 2, 4\}$. We kiezen t_1 willekeurig: $t_1 = 3$. Dan is $A_1 = \{4, 5, 7\}$. Nu proberen we t_2 zo te kiezen, dat A_1 en A_2 disjunct zijn. Als we $t_2 = 1$ kiezen, krijgen we $A_2 = \{2, 3, 5\}$. Nu zijn A_1 en A_2 niet disjunct, omdat ze allebei 5 bevatten. We mogen ook niet $t_2 = 2$ kiezen, want dan is $A_2 = \{3, 4, 6\}$ en bevatten zowel A_1 als A_2 het getal 4. Als we $t_2 = 4$ kiezen, komt 5 in zowel A_1 als A_2 voor. Met $t_2 = 5$ komt 7 in zowel A_1 als A_2 voor. De getallen uit S mogen dus allemaal niet meer!

Waarom kunnen we in dit voorbeeld geen t_2 vinden, terwijl we in het vorige voorbeeld maar liefst t_1 tot en met t_4 konden vinden zodat de verzamelingen A_j disjunct zijn? We moeten t_2 zo kiezen dat $t_2 + 1$, $t_2 + 2$ en $t_2 + 4$ niet gelijk zijn aan 4, 5 en 7, dus aan $3 + 1$, $3 + 2$ en $3 + 4$. Anders gezegd, er mogen geen getallen a en b in A bestaan zodat $t_2 + a = 3 + b$. Dat betekent dat t_2 niet gelijk mag zijn aan $b - a + 3$, voor alle a en b in A. Als we alle mogelijke a en b proberen, zien we dat $b - a + 3$ een getal tussen 0 en 6 is (inclusief 0 en 6). Omdat alle getallen uit S al in dit rijtje voorkomen, kunnen we geen t_2 meer kiezen. Dat kunnen we ook zien ***in tabel 1***, waarin alle waarden staan die $b - a$ aanneemt, en alle waarden van $b - a + 3$. Hierin komen alle getallen uit S voor, dus kunnen we geen t_2 kiezen.

a \ b	1	2	4
1	0	1	3
2	-1	0	2
4	-3	-2	0

a \ b	1	2	4
1	3	4	6
2	2	3	5
4	0	1	3

tabel 1 Bij voorbeeld 2
links: de waarden die b – a aanneemt,
rechts: de waarden die b – a + 3 aanneemt

In het eerste voorbeeld mocht t2 niet gelijk zijn aan $b - a + 1$. In dit geval was $b - a$ altijd een even getal, namelijk 0, ±2, ±4 of ±6. Daarom was $b - a + 1$ altijd oneven, dus voor t_2 konden we elk even getal uit S kiezen. Er zijn zelfs nog meer mogelijkheden: 9 mocht ook. Het bijzondere aan deze verzameling A is dat $b - a$ weinig verschillende waarden aanneemt: de opeenvolgende getallen verschillen altijd 2, dus 2 komt meerdere malen voor als verschil. Hetzelfde geldt voor -4, -2, 0 en 4. Dat zien we ook als we weer een tabel maken met alle mogelijke waarden van $b - a$ en $b - a + 1$; ***zie tabel 2***.

a \ b	2	4	6	8
2	0	2	4	6
4	-2	0	2	4
6	-4	-2	0	2
8	-6	-4	-2	0

a \ b	2	4	6	8
2	1	3	5	7
4	-1	1	3	5
6	-3	-1	1	3
8	-5	-3	-1	1

tabel 2 Bij voorbeeld 1
links: de waarden die $b - a$ aanneemt,
rechts: de waarden die $b - a + 1$ aanneemt

Oplossing

Laten we nu proberen om de opgave op te lossen. Van de voorbeelden hebben we geleerd dat het aantal getallen dat het verschil is tussen twee getallen uit A belangrijk is. In het eerste voorbeeld waren er niet veel mogelijkheden voor het verschil van de getallen uit A. Daarom konden we daar meer t_j's vinden zodat de verzamelingen A_j disjunct zijn, dan in het tweede voorbeeld, waarin er veel meer mogelijkheden waren voor het verschil van de getallen uit A. Nu is A een gegeven, vaste verzameling, dus we kunnen er niet voor zorgen dat het aantal verschillen klein is. We moeten er dus rekening mee houden dat A heel ongunstig kan zijn.

Laten we de elementen van A een naam geven: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{101}\}$. De verzameling A_j bestaat dan uit de getallen $t_j + a_1$, $t_j + a_2$, …, $t_j + a_{101}$. Nu gaan we $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ proberen te kiezen, zodat ieder nieuw getal t_j een verzameling A_j geeft die disjunct is met $A_1, \ldots, A_{j-1}$. Het idee is dat we gaan afschatten hoeveel getallen we niet meer als t_j mogen kiezen. Als er nog ten minste één mogelijkheid is voor t_j die wel mag (dus zodat A_j disjunct is met $A_1, \ldots, A_{j-1}$), dan kunnen we nog een t_j kiezen. We zouden kunnen proberen om de getallen slim te kiezen, zodat er nog veel mogelijkheden over zijn. Dat is echter moeilijk omdat we niets over A weten. Daarom kiezen we t_j willekeurig uit alle mogelijkheden die een A_j geven die disjunct is met de rest van de verzamelingen.

Voor t_1 kunnen we een willekeurig element van S kiezen. Nu willen we t_2 zo kiezen, dat er geen a_i en a_j zijn zodat $a_i + t_2 = a_j + t_1$; dus t_2 mag niet gelijk zijn aan $a_j - a_i + t_1$. We weten natuurlijk niet welke waarden $a_j - a_i + t_1$ aanneemt, maar dat is ook niet nodig: we hoeven alleen te weten hoeveel mogelijkheden voor t_2 we overhouden. Omdat A precies 101 elementen heeft, zijn er in totaal $101^2 = 10201$ mogelijke tweetallen (a_i, a_j) en dus hoogstens 10201 mogelijkheden voor $a_j - a_i$. Als we t_1 gekozen hebben, is t_1 een vast getal en zijn er dus ook hoogstens 10201 mogelijkheden voor $a_j - a_i + t_1$. We mogen t_2 niet gelijk aan een van deze (hoogstens) 10201 getallen kiezen (waarvan een aantal mogelijk niet eens in S liggen), maar dan zijn er nog minstens $1000000 - 10201 = 989799$ mogelijkheden voor t_2 in S over.

We kiezen t_2 gelijk aan een van deze minstens 989799 getallen, en proberen nu een t_3 te kiezen. Er mogen geen a_i en a_j zijn zodat $a_i + t_3 = a_j + t_1$ of $a_i + t_3 = a_j + t_2$. Dat betekent dat t_3 niet gelijk mag zijn aan $a_j - a_i + t_1$, en ook niet gelijk aan $a_j - a_i + t_2$. Daarom mogen er hoogstens $2 \cdot 10201 = 20402$ getallen niet voor t_3; dus er zijn nog minstens 979598 mogelijkheden over.

Nu proberen we dit ook te doen voor $t_4, t_5, \ldots, t_{100}$. Als we $t_1, \ldots, t_{k-1}$ al gekozen hebben, moeten we t_k zo kiezen, dat er geen a_i en a_j in A en t_l (met $l < k$) zijn zodat $a_i + t_k = a_j + t_l$. Daarom mag t_k niet gelijk zijn aan $a_j - a_i + t_l$. Voor iedere l neemt dit hoogstens 10201 waarden aan, en l loopt van 1 tot $k - 1$; dus in totaal zijn er hoogstens $10201(k - 1)$ getallen waaraan t_k niet gelijk mag zijn. Zolang $10201(k - 1)$ kleiner is dan 1000000, kunnen we dus een t_k kiezen. Het aantal mogelijkheden is natuurlijk het kleinst voor $k = 100$. Hiervoor mogen we $10201 \cdot 99 = 1009899$ getallen niet kiezen. Maar er zijn maar 1000000 getallen om uit te kiezen! Deze methode werkt dus niet helemaal: we moeten iets scherper schatten hoeveel getallen we niet meer mogen kiezen voor t_k.

Laten we nog eens kijken naar het *aantal* waarden dat $a_j - a_i$ kan aannemen. We hebben dit afgeschat op 101^2. Echter, als $i = j$ is $a_j - a_i = 0$. Eigenlijk zijn er dus minder mogelijkheden voor $a_j - a_i$: er zijn hoogstens $101 \cdot 100 = 10100$ mogelijkheden met $i \neq j$, en één mogelijkheid met $i = j$. In de tabellen bij de voorbeelden kunnen we dit ook al zien: op de diagonaal staan alleen nullen. In totaal neemt $a_j - a_i$ dus hoogstens 10101 waarden aan. Als we hiermee bovenstaande methode om $t_2, t_3, \ldots, t_{100}$ te kiezen herhalen, dan zien we dat er hoogstens $10101(k - 1)$ getallen zijn waaraan t_k niet gelijk mag zijn. Als we nu $k = 100$ nemen, zijn er hoogstens 999999 getallen die we niet mogen kiezen als t_{100}. Er is dus nog één mogelijkheid voor t_{100} over! Zelfs als we de getallen willekeurig kiezen, kunnen we dus nog een t_{100} kiezen. We kunnen de getallen $t_1, \ldots, t_{100}$ dus kiezen door steeds een willekeurig getal te nemen zodat A_j disjunct is met $A_1, \ldots, A_{j-1}$. Omdat we hebben laten zien dat er steeds nog zo'n getal bestaat, is het bewijs afgerond: we kunnen inderdaad getallen $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ kiezen zodat de verzamelingen $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ disjunct zijn.

Tot slot

En mijn hoop om een goede score te halen? Ik dacht dat ik deze opgave goed had en hoopte nog een punt voor opgave 2 te hebben; dus was ik tevreden over de eerste dag. Helaas bleek ik een foutje te hebben gemaakt in opgave 1: als ik het me goed herinner, was ik vergeten om het verschil $a_j - a_j = 0$ mee te tellen, zodat ik maar 10100 mogelijkheden voor $a_j - a_i + t_l$ had geteld. De tweede dag leverde maar 1 extra punt op, zodat mijn score tegenviel. Door de training wist ik wel beter hoe je zulke opgaven aan kunt pakken. Dat leverde niet alleen punten op bij de olympiade, maar is ook tijdens mijn studie goed van pas gekomen. Bovenal is de olympiade een mooie uitdaging voor leerlingen met interesse in wiskunde.

Voor mij was het een heel leuke ervaring om intensief en op hoog niveau met wiskunde bezig te zijn en andere leerlingen van over de hele wereld met dezelfde interesse te ontmoeten.

Info

Website IMO2011: *www.imo2011.nl*

Zie ook:

- Quintijn Puite (2010): *Van Bijsterveldt lanceert IMO2011*. In: *Euclides* 85(5), p. 209.
- Birgit van Dalen (2010): *Op weg naar IMO2011 / IMO2002 - Opgave 1*. In *Euclides* 85(5), pp. 210-211.

Over de auteur

Esther Bod heeft in 2002 en 2003 deelgenomen aan de *Internationale Wiskunde Olympiade* en in 2006 en 2007 aan de *International Mathematics Competition for University Students*. Daarnaast is ze als deelnemer en organisator betrokken geweest bij de *Landelijk Interuniversitaire Mathematische Olympiade*. Ze werkt als promovendus aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht.
E–mailadres: *E.Bod@uu.nl*