Op weg naar IMO2011

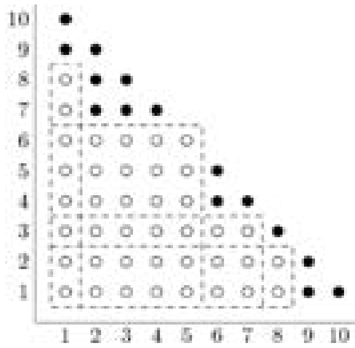
IMO2002 – OPGAVE 1

[Birgit van Dalen]

In de zomer van 2002 vertrok ik met vijf andere scholieren en twee begeleiders vanaf Schiphol naar Glasgow in Schotland voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Voor het eerst in de geschiedenis telde het Nederlandse team twee meisjes, en we zouden nog meer geschiedenis kunnen gaan schrijven door een medaille te halen; dat was een Nederlands meisje nog nooit gelukt. Op twee achtereenvolgende dagen kregen we in totaal zes pittige problemen voorgelegd. Het lukte mij om er hiervan twee op te lossen, maar dat was helaas net te weinig voor een bronzen medaille. Het deelnemen aan de wedstrijd was echter wel een heel mooie ervaring en ik heb met heel veel plezier aan de opgaven gewerkt.
In dit artikel wil ik iets laten zien van mijn ervaringen met opgave 1 van deze Olympiade.

De opgave
Zij n een positief geheel getal. We bekijken een driehoek van roosterpunten: de verzameling T bestaande uit de punten (x, y) met x en y positieve gehele getallen en $x + y \leq n + 1$. Elk punt van T is zwart of wit gekleurd. Als een punt (x, y) van T wit is, dan zijn ook alle punten (x', y') met $x' \leq x$ en $y' \leq y$ wit.
Een X-verzameling is een verzameling van n zwarte punten waarvan alle x-coördinaten verschillend zijn. Een Y-verzameling is een verzameling van n zwarte punten waarvan alle y-coördinaten verschillend zijn.
Bewijs dat het aantal X-verzamelingen gelijk is aan het aantal Y-verzamelingen.

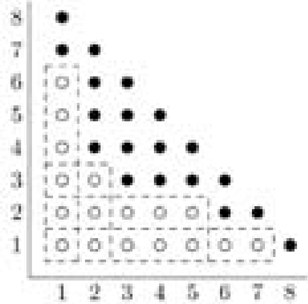
Op het eerste gezicht ziet deze opgave er ingewikkeld uit. Maar de ervaring leert dat je je daar bij de olympiade niet moet door laten afschrikken: de meest eenvoudig ogende opgaven zijn vaak het moeilijkst. Laten we gewoon maar eens gaan kijken wat deze opgave precies zegt.
We bekijken een driehoek van roosterpunten die op een bepaalde manier zwart en wit zijn gekleurd. Om precies te zijn: als een punt (x, y) wit is, dan is de hele rechthoek met hoekpunten $(1, 1)$, $(x, 1)$, (x, y) en $(1, y)$ wit gekleurd. In feite bestaat het witte gebied dus uit een aantal (overlappende) rechthoeken die allemaal $(1, 1)$ als hoekpunt hebben. ***In figuur 1*** staat een voorbeeld van zo'n kleuring.



figuur 1 Een voorbeeld van een toegestane kleuring

Een X-verzameling bestaat uit n zwarte punten die allemaal een andere x-coördinaat hebben. Dat betekent dus dat er hoogstens één punt van zo'n X-verzameling *in elke kolom* zit. Maar aangezien we maar n kolommen hebben (met x-coördinaten 1, 2, …, n) moet de X-verzameling dan wel precies één punt in elke kolom hebben. Dus we willen tellen op hoeveel manieren je een verzameling zwarte punten kunt samenstellen door uit elke kolom precies één punt te kiezen.
In het voorbeeld ***van figuur 1*** is dit makkelijk: in de 5e kolom zijn alle punten wit en kunnen we dus geen zwart punt kiezen. Dat betekent dat er geen X-verzameling bestaat.
Hoe zit dit voor de Y-verzamelingen? Dat zijn verzamelingen van n punten waarvan er *in elke rij* precies één zit. Maar in de zesde rij zijn alle punten wit, zodat er geen Y-verzameling bestaat.
Met dit voorbeeld zijn we dus snel klaar: het aantal X-verzamelingen is nul en het aantal Y-verzamelingen ook, dus deze aantallen zijn gelijk.

Maar de opgave was vast niet zo makkelijk bedoeld. Als we nog eens een plaatje tekenen met een andere kleuring (***zie figuur 2***), blijkt al dat eenzelfde redenering niet



figuur 2 Een tweede voorbeeld

opnieuw opgaat. Bij nader inzien hadden we met ons eerste voorbeeld bij toeval een heel speciaal geval te pakken: er lag een wit punt op de diagonaal (dat zijn de punten (x, y) met $x + y = n + 1$), waardoor er geen X- en Y-verzamelingen bestonden. Maar hiermee zijn we nog niet veel wijzer geworden over het algemene geval.
We kijken daarom verder naar het voorbeeld van figuur 2. Om een X-verzameling te maken moeten we uit kolom 1 tot en met 8 steeds één zwart punt kiezen. In kolom 1 zijn er 2 zwarte punten, waarvan we er eentje kiezen. Onafhankelijk daarvan kunnen we één van de 4 zwarte punten in kolom 2 kiezen. Samen hebben we dan al $2 \cdot 4$ mogelijkheden. Vervolgens kunnen we op 4 manieren in kolom 3 een zwart punt kiezen. Enzovoorts. Al met al wordt het aantal X-verzamelingen gelijk aan:
$2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$
Zo berekenen we ook het aantal Y-verzamelingen door in elke rij het aantal zwarte punten te tellen. We krijgen:
$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$
We hoeven deze twee getallen niet uit te rekenen om te zien dat ze gelijk zijn: we vermenigvuldigen namelijk dezelfde getallen (weliswaar in een andere volgorde). Dit is wellicht de sleutel van de oplossing. Als het altijd zo is dat we voor de berekening van het aantal X-verzamelingen dezelfde getallen met elkaar vermenigvuldigen als voor de berekening van het aantal Y-verzamelingen, dan zijn we klaar: dan is

het aantal X-verzamelingen gelijk aan het aantal Y-verzamelingen.
Laten we toch even teruggaan naar het voorbeeld ***uit figuur 1***. Als we daar dezelfde methode toepassen, krijgen we voor het aantal X-verzamelingen:
$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1$
en voor het aantal Y-verzamelingen:
$2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$
We wisten al dat deze producten beide gelijk waren aan 0, maar we zien nu ook dat er in beide producten precies dezelfde getallen staan. Dat kan geen toeval zijn. We losten dit speciale geval in eerste instantie heel anders op, maar nu blijkt dat het toch op precies dezelfde manier opgelost kan worden als het algemene geval.

Tijd om wat notatie in te voeren. Zij c_i het aantal zwarte punten in kolom i en r_i het aantal zwarte punten in rij i. Ons vermoeden is nu dat het rijtje $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ een permutatie is van het rijtje $R = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$: het ene rijtje bevat dezelfde getallen als het andere, maar in een andere volgorde.
Laten we dit eerst eens voor een makkelijk geval bewijzen: een rooster waarin alle punten zwart zijn. Dan zijn de rijtjes C en R gelijk aan $C = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$ en $R = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$. Het is duidelijk waar dat de twee rijtjes precies dezelfde getallen bevatten.
Als we nu het punt (1, 1) wit maken, veranderen alleen c_1 en r_1: deze waren eerst gelijk aan n en worden nu gelijk aan $n-1$. De rijtjes C en R blijven dus dezelfde getallen bevatten.
Vervolgens maken we (1, 2) wit. Dan veranderen alleen c_1 en r_2: deze waren beide gelijk aan $n-1$ en worden nu gelijk aan $n-2$. Opnieuw blijft het waar dat C en R dezelfde getallen bevatten (maar nu wel in een andere volgorde). We kunnen zo één voor één de punten wit blijven maken. Na kolom 1 gaan we verder met kolom 2. We maken steeds *alleen* punten wit waarvoor geldt dat het punt links ervan en het punt eronder (voor zover die bestaan) al wit waren. Op deze manier kunnen we alle toegestane kleuringen bereiken.
We moeten nu bewijzen dat de eigenschap dat C en R dezelfde getallen bevatten, behouden blijft als we een extra punt wit maken. We hebben dit al gezien voor de punten (1, 1) en (1, 2), maar we willen het nog in het algemeen doen. Daarna mogen we concluderen dat bij alle toegestane kleuringen deze eigenschap geldt.

Stel dus dat bij een zekere kleuring geldt dat C en R dezelfde getallen bevatten. We kiezen een zwart punt (x, y) met de eigenschap dat $(x, y-1)$ wit is (of $y = 1$, zodat dit punt niet bestaat), en dat $(x-1, y)$ wit is (of $x = 1$, zodat dit punt niet bestaat).
Wat geldt er nu voor c_x en r_y?
De zwarte punten in kolom x zijn precies de punten $(x, y), (x, y+1), \ldots, (x, n-x+1)$. Dit zijn er $n-x-y+2$; dus $c_x = n-x-y+2$.
De zwarte punten in rij y zijn precies de punten $(x, y), (x+1, y), \ldots, (n-y+1, y)$; dus $r_y = n-y-x+2$. We zien dat $c_x = r_y$.
Als we nu het punt (x, y) wit maken, heeft dit alleen invloed op c_x en r_y; de rest van de c_i-tjes en r_i-tjes blijft gelijk. In kolom x en rij y verdwijnt een zwart punt, dus c_x en r_y worden beide 1 kleiner. Maar ze waren gelijk aan elkaar, dus ook in de nieuwe situatie zijn ze weer gelijk aan elkaar. Dat betekent dat er niets veranderd is aan het feit dat C en R dezelfde getallen bevatten. En dat is precies wat we wilden bewijzen.
Het bewijs is nu klaar, maar laten we nog even terugkijken. We hebben namelijk in feite méér bewezen dan wat de opgave ons vroeg. In onze notatie was de opgave om te bewijzen dat:
$c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n$
Maar we hebben bewezen dat de rijtjes $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ en $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ precies dezelfde getallen bevatten. Daaruit volgt natuurlijk dat het product gelijk is, maar dat geldt niet andersom. Zo is $6 \cdot 10 \cdot 3 = 5 \cdot 9 \cdot 4$, maar de rijtjes (6, 10, 3) en (5, 9, 4) bevatten niet dezelfde getallen.
Het was eigenlijk een gewaagde stap om iets te gaan bewijzen dat sterker was dan het gevraagde; voor hetzelfde geld was het *niet* waar geweest. Maar dat is het leuke aan olympiadeopgaven: je hebt soms zo'n gewaagde, creatieve stap nodig om tot een oplossing te komen.

Dit en nog veel meer nuttige strategieën leer ik tegenwoordig aan toekomstige olympiadedeelnemers. Twee jaar na mijn eigen deelname aan de olympiade werd ik gevraagd om mee te helpen bij de training van deze getalenteerde leerlingen. Sindsdien stop ik met veel plezier het grootste deel van mijn vrije tijd in het vormgeven van de training en het begeleiden van de leerlingen. We hebben het trainingsprogramma de afgelopen jaren meer gestructureerd en flink uitgebreid; steeds meer leerlingen krijgen de kans om hun talent voor wiskunde te ontplooien en worden hierbij intensief begeleid door onze negen trainers. Het doel is natuurlijk de prestaties van Nederland bij de Internationale Olympiade te verbeteren. Het eerste Nederlandse meisje dat een medaille haalt, laat nog op zich wachten, maar ik heb goede hoop voor de toekomst.

Info
Website IMO2011: *www.imo2011.nl*

Over de auteur
Birgit van Dalen is promovendus wiskunde aan de Universiteit Leiden. Daarnaast is ze sinds november 2004 betrokken bij de training van leerlingen voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Ze was de vice-teamleider tijdens de IMO in Vietnam (2007), Spanje (2008) en Duitsland (2009). Ze is verder één van de hoofdorganisatoren van IMO2011 in Nederland.
E-mailadres: *dalen@math.leidenuniv.nl*