Na IMO2011: IMO2012 opgave 6

[Jetze Zoethout]

Bij de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) strijden elk jaar zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen door hun tanden te zetten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. In de serie 'Op weg naar IMO2011' in 'Euclides', jaargangen 85, 86 en 87, heeft u een aantal van deze opgaven langs zien komen. In dit artikel weer een volgende opgave, nu van IMO2012, besproken door goudenmedaillewinnaar Jetze Zoethout.

Deze zomer werd de 53e International Mathematical Olympiad gehouden in Argentinië. Vaak zijn de opgaven die de deelnemers voorgeschoteld krijgen, niet op te lossen met alleen wiskunde die op de middelbare school wordt onderwezen.
Er bestaan echter ook ontzettend moeilijke opgaven waarvoor *geen* speciale kennis is vereist. Een voorbeeld daarvan zagen we tijdens deze IMO.

IMO 2012, opgave 6

Vind alle gehele getallen $n > 0$ waarvoor er gehele getallen $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ bestaan zodanig dat:

(1)… $\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\dots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\dots+\frac{n}{3^{a_n}}=1$

Op naar een oplossing

Een goede manier om een gevoel voor de opgave te krijgen is het bekijken van kleine waarden van n. We beginnen bij $n = 1$. De vraag is of er een geheel getal $a_1 \geq 0$ bestaat zodat:

$$\frac{1}{2^{a_1}}=\frac{1}{3^{a_1}}=1$$

Het blijkt dat $a_1 = 0$ voldoet. Voor $n = 2$ is de vraag of er gehele getallen $a_1, a_2 \geq 0$ bestaan zodat:

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}=1$$

Hier blijkt $a_1 = a_2 = 1$ een oplossing. Als we vervolgens verder gaan naar $n = 3$, wordt het opeens veel moeilijker. We proberen gehele getallen $a_1, a_2, a_3 \geq 0$ te vinden zodat:

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\frac{1}{2^{a_3}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\frac{3}{3^{a_3}}=1$$

Maar dat lukt ons niet. Ook bij $n = 4$ lijken er geen oplossingen te zijn van (1). Als we de moed dan al bijna opgegeven hebben, blijkt er voor $n = 5$ wél weer zo'n oplossing te zijn:
$a_1 = a_2 = a_3 = 2$ en $a_4 = a_5 = 3$ is een oplossing van (1).
Vergelijking (1) bestaat eigenlijk uit twee delen, namelijk:

(2)… $\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\dots+\frac{1}{2^{a_n}}=1$

en

(3)… $\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\dots+\frac{n}{3^{a_n}}=1$

De breuken maken het lastig met deze vergelijkingen te werken. Gelukkig kunnen we van deze breuken afkomen. Door links en rechts met 3^s te vermenigvuldigen, waarbij $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, gaat (3) over in:

(4)… $3^{s-a_1}+2\cdot3^{s-a_2}+\dots+n\cdot3^{s-a_n}=3^s$

Alle driemachten die hier staan, zijn oneven. Omdat nu de rechterkant van (4) oneven is, moet er links een oneven aantal oneven termen staan. Dit betekent dat het aantal oneven getallen onder $1, 2, \dots, n$ zelf oneven moet zijn. Stel nu dat n van de vorm $4k - 1$ of $4k$ is. Dan zijn er $2k$ oneven getallen onder $1, 2, \dots, n$, namelijk $1 = 2\cdot1 - 1$, $3 = 2\cdot2 - 1, \dots, 4k - 1 = 2\cdot(2k) - 1$. Maar $2k$ is even: tegenspraak.
Dus weten we nu dat, als voor zekere n uitdrukking (1) een oplossing heeft, n van de vorm $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 2$ moet zijn. Dit verklaart waarom we voor $n = 3$ en $n = 4$ geen oplossingen konden vinden.

We hadden al een oplossing gevonden voor $n = 1$, $n = 2$ en $n = 5$. Hoe zit het voor $n = 6$, $n = 9$ en $n = 10$? Ook voor deze n kunnen we een oplossing vinden.
Daardoor krijgen we het vermoeden dat er voor iedere n van de vorm $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 2$ een oplossing van (1) bestaat.
Om dit aan te tonen zullen we voor al deze n een oplossing $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ moeten construeren.
Het vinden van een directe formule voor de $a_1, a_2, \dots, a_n$ in termen van n blijkt echter nog niet zo makkelijk… Daarom gaan we proberen een oplossing voor n te construeren uit oplossingen van kleinere waarden van n.

Algemeen

Stel dat we getallen $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ hebben die voldoen aan (2). Bij deze vergelijking maakt de volgorde van deze getallen niet uit. We bekijken de term $\frac{1}{2^{a_i}}$, waarbij i een geheel getal met $1 \leq i \leq n - 1$ is. Om nu een oplossing te vinden voor n kunnen we deze term als volgt opsplitsen:

$$\frac{1}{2^{a_i}}=\frac{2}{2^{a_i+1}}=\frac{1}{2^{a_i+1}}+\frac{1}{2^{a_i+1}}$$

Dus als we in de rij getallen $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ het getal a_i vervangen door (het tweetal) a_{i+1}, a_{i+1}, hebben we een oplossing van (2) voor het geval n.

Nu willen we bij vergelijking (3) een soortgelijke constructie uitvoeren. We lopen echter meteen al tegen een moeilijkheid aan. Waren in (2) nog alle tellers gelijk aan 1, dit gemak hebben we niet bij (3). Laten we daarom een algemenere versie van deze vergelijking bekijken. We gaan voor willekeurige gehele $b_1, \dots, b_n > 0$ oplossingen $a_1, \dots, a_n \geq 0$ construeren van:

(5)… $\frac{b_1}{3^{a_1}}+\frac{b_2}{3^{a_2}}+\dots+\frac{b_n}{3^{a_n}}=1$

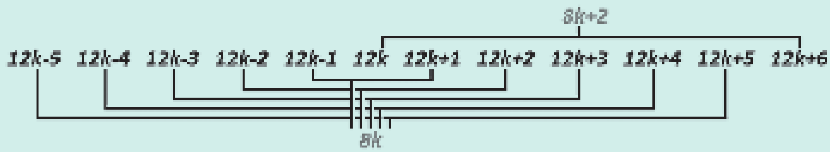
Stel opnieuw dat we een oplossing van (5) hebben voor $n - 1$. We gaan net als bij (2) proberen de i-de term op te splitsen, namelijk:

$$\frac{b_i}{3^{a_i}}=\frac{3b_i}{3^{a_i+1}}$$

Er is hier geen unieke manier om de teller op te gaan splitsen, maar dit geeft ons juist heel veel vrijheid. We hebben:

$$\frac{b_i}{3^{a_i}}=\frac{3b_i}{3^{a_i+1}}=\frac{u}{3^{a_i+1}}+\frac{v}{3^{a_i+1}}$$

waarbij $u + v = 3b_i$. Als we in onze oplossing voor het geval $n - 1$ en $b_1, \dots, b_{n-1}$ dus a_i vervangen door a_{i+1}, a_{i+1}, vinden we een oplossing voor het geval n waarbij b_i is vervangen door u en v. We zien dat er met de a_i nu precies hetzelfde is gebeurd als bij onze constructiestap bij vergelijking (2).



figuur 1

Ook van (1) als geheel kunnen we zo'n algemenere versie bekijken. We noemen nu een rijtje $b_1, \ldots, b_n$ *oplosbaar* als er een oplossing $a_1, \ldots, a_n$ bestaat van (2) en (5):

(6)…

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{b_1}{3^{a_1}}+\frac{b_2}{3^{a_2}}+\ldots+\frac{b_n}{3^{a_n}}=1$$

Om ons vermoeden te bewijzen moeten we dus aantonen dat het rijtje 1, 2, …, n oplosbaar is voor alle n van de vorm $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 2$.

Hierboven hebben we gezien: als het rijtje $b_1, \ldots, b_{n-1}$ oplosbaar is, dan is dit rijtje waarbij b_i is vervangen door u en v ook oplosbaar, waarbij dan $u + v = 3b_i$. Als we dus omgekeerd van een rijtje met de getallen u en v willen weten of het oplosbaar is, is het voldoende om te laten zien dat datzelfde rijtje waarbij u en v vervangen zijn door $\frac{u+v}{3}$ oplosbaar is. Hierbij moet $u + v$ natuurlijk deelbaar zijn door 3.

We zullen deze stap weergeven als:

$\{u, v\} \mapsto \frac{u+v}{3}$

Nemen we in het bijzonder $u = m$ en $v = 2m$, dan vinden we dat, als we van een rijtje met de getallen m en $2m$ willen weten of het oplosbaar is, het voldoende is om te laten zien dat datzelfde rijtje waarbij m en $2m$ vervangen zijn door $\frac{m+2m}{3}=m$, oplosbaar is.

Concreet betekent dit dat we in een rijtje waarin m en $2m$ voorkomen, het getal $2m$ meteen kunnen negeren.

Om te concluderen dat er een oplossing van (1) bestaat voor $n = 5$, hadden we het geval $n = 5$ als volgt kunnen construeren uit het geval $n = 2$. Daarvoor moeten we het rijtje 1, 2, 3, 4, 5 reduceren tot het rijtje 1, 2. Dit kan via de stappen:

$\{4,5\}\mapsto 3,\ \{3,3\}\mapsto 2,\ \{1,2\}\mapsto 1$

Merk op dat deze laatste stap in feite het negeren van de 2 is. Deze stappen leveren achtereenvolgens de b_i-rijtjes 1, 2, 3, 4, 5, dan 1, 2, 3, 3, dan 1, 2, 2 en dan 1, 2. Precies wat we wilden.

De constructie van de rij a_i gaat de andere kant op: omdat 1, 2 oplosbaar is (met a-rij 1, 1), is 1, 2, 2 ook oplosbaar (met a-rij 2, 2, 1), dus ook 1, 2, 3, 3 (met a-rij 2, 2, 2, 2), dus ook 1, 2, 3, 4, 5 (met a-rij 2, 2, 2, 3, 3).

Ons doel is nu om alle n van de vorm $n = 4k + 1$ en $n = 4k + 2$ op deze manier te 'reduceren' tot eerdere gevallen.

Doordat we deze algemenere versie bekijken, hoeven we niet noodzakelijk n te reduceren tot $n – 1$. Dat is maar goed ook, want dat had ook nooit kunnen lukken (waarom?). Een reductie van n naar $n – 4$ zou wel kunnen slagen.

Stel dat n van de vorm $n = 4k + 2$ is. Het zou mooi zijn als we het rijtje 1, 2, …, $(4k + 2)$ kunnen reduceren tot 1, 2, …, $(4k – 2)$ door de getallen $4k – 1$, $4k$, $4k + 1$ en $4k + 2$ weg te werken. Om onze stappen uit te kunnen voeren, moeten we echter weten wat er met onze getallen gebeurt bij deling door 3. Daarom schrijven we $n = 12k + r$ en proberen we dit geval meteen te reduceren tot $n = 12(k – 1) + r$. We gaan dus over van een reductie met 4 stappen op een reductie met 12 stappen.

Laten we dit bijvoorbeeld eens proberen voor n van de vorm $n = 12k + 6$. Dan moeten we proberen de getallen $12k – 5$, $12k – 4$, …, $12k + 6$ weg te werken. We zullen nu 12 stappen moeten zetten. Om de constructie overzichtelijk te houden, proberen we stappen uit te voeren die een even getal opleveren, dat we vervolgens meteen kunnen negeren.

Het zou ook het makkelijkst zijn als dit even getal steeds hetzelfde was. Dit kunnen we doen door om het getal $12k$ 'heen te bouwen'. Dit betekent dat we beginnen met de stap $\{12k-1,12k+1\}\mapsto 8k$. Vervolgens doen we $\{12k-2,12k+2\}\mapsto 8k$ en hiermee gaan we door tot $\{12k-5,12k+5\}\mapsto 8k$

Deze stappen kunnen we in één keer weergeven door:

$\{12k-i,12k+i\}\mapsto 8k$ voor $1 \le i \le 5$

Nu hebben we $12k + 6$ en $12k$ nog over, waarmee we de stap $\{12k,12k+6\}\mapsto 8k+2$ uitvoeren. Dit proces is weergegeven ***in figuur 1***.

Tot slot moeten we nog controleren of we $8k$ en $8k + 2$ echt mogen negeren. Hiervoor moeten $4k$ en $4k + 1$ beide voorkomen in de rij 1, 2, …, $(12k – 6)$. Er moet dus gelden dat $4k + 1 \le 12k – 6$, oftewel dat $8k \ge 7$. Aangezien k geheel moet zijn, volgt hieruit dat k minstens 1 moet zijn.

Nu kunnen we ook de algemene constructie uitvoeren. We schrijven $n = 12k + r$ met k, r geheel en $0 \le r \le 11$. Als $6 \le r \le 11$, komen $12k$ en $12k + 6$ beide voor in de rij $(12k + r – 11)$, …, $(12k + r)$ die we weg moeten werken. Nu moeten we niet alleen om $12k$ heen bouwen, maar ook om $12k + 6$. De lezer kan zelf controleren dat dit de volgende stappen oplevert:

$$\{12k-i,12k+i\}\mapsto 8k \quad \text{voor } 0\le i\le r$$
$$\{12k+6-j,12k+6+j\}\mapsto 8k+4 \quad \text{voor } 0\le j\le 5-r$$
$$\{12k+6,12k\}\mapsto 8k+2$$

en dat we de resulterende getallen inderdaad kunnen negeren voor $k \ge 1$.

De stappen voor $r = 10$ staan weergegeven ***in figuur 2***. Hier zien we ook dat onze overgang naar stappen van 12 belangrijk was: hoewel $12k + 6$ en $12k + 10$ verschil 4 hebben, gaat de reductie heel anders.

Voor $0 \le r \le 5$ moeten we om $12k – 6$ en $12k$ heen bouwen. Ik laat het aan de lezer over om de bijbehorende stappen te bedenken en te controleren dat we de resulterende getallen kunnen negeren, maar nu voor $k \ge 2$. Ook hier helpt het om een schema te tekenen als in de figuren 1 en 2. Hiermee hebben we het geval n gereduceerd tot het geval $n – 12$ voor alle $n \ge 18$. Zo kunnen we alle gevallen $n \ge 18$ van de vorm $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 2$ reduceren tot een geval $n < 18$, ook van deze vorm, door een aantal keer deze algemene reductie uit te voeren. Dit betekent dat we alle $n < 18$ van deze vorm nog moeten onderzoeken.

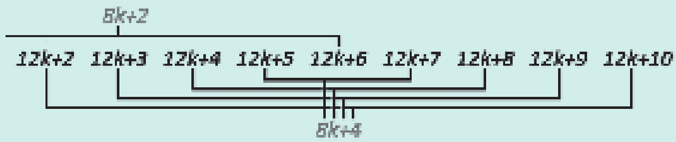
We zouden voor al deze n een oplossing van (1) kunnen zoeken, maar dit kan lang duren. We kunnen onze reduceerstap ook gebruiken om al deze n terug te brengen tot een lagere n. Zo herleiden we uiteindelijk alle gevallen tot het geval $n = 1$.

We kunnen bijvoorbeeld het geval $n = 17$ herleiden tot $n = 13$ door de stappen:

$\{9,15\}\mapsto 8,\ \{4,8\}\mapsto 4,\ \{10,17\}\mapsto 9,\ \{14,16\}\mapsto 10$

Ook $n = 14$ kan gereduceerd worden tot $n = 13$, door de 14 te negeren. We zagen ook al hoe $n = 5$ kan worden gereduceerd tot $n = 2$ en vervolgens tot $n = 1$. Wat hier tussenin gebeurt, kan de lezer zelf onderzoeken.

Als we alle gevallen hebben gereduceerd tot het geval $n = 1$, hebben we de opgave opgelost!



figuur 2

Antwoord

Het antwoord op deze opgave is dus: precies alle gehele $n > 0$ van de vorm $n = 4k + 1$ en van de vorm $n = 4k + 2$.

Zoals aan het begin gezegd, hebben we geen wiskunde nodig gehad die niet op de middelbare school gegeven wordt.
Dat betekent echter zeker niet dat deze opgave eenvoudig is. Een aantal cruciale stappen uit het bewijs zijn niet makkelijk te bedenken. Het wegwerken van de breuken, het construeren van oplossingen uit oplossingen van kleinere gevallen, het bedenken van de reduceerstap, het algemener maken van de opgave en het overstappen op een reductie met 12 stappen zijn de belangrijkste voorbeelden.
Ikzelf ben bij het werken aan deze opgave vooral bezig geweest met het construeren, maar kreeg daar helaas geen punten voor. Een ander Nederlands teamlid vond dat n in ieder geval van de vorm $n = 4k + 1$ of $n = 4k + 2$ moet zijn en kreeg daar 1 punt voor.
De statistieken spreken ook boekdelen. Van de 548 deelnemers aan de IMO haalden er slechts 35 meer dan 1 punt en voor slechts 10 deelnemers waren de volledige 7 punten weggelegd.
Ook met 'simpele' wiskunde bestaan er ontzettend moeilijke opgaven.

Over de auteur

Jetze Zoethout deed twee keer mee aan de Internationale Wiskunde Olympiade en behaalde achtereenvolgens een bronzen medaille (Nederland, 2011) en een gouden medaille (Argentinië, 2012). Hij studeert nu wijsbegeerte en wiskunde aan de Universiteit Utrecht.
E-mailadres: *jetzezoethout@hotmail.com*

MEESTERLIJK ONDERWIJS

BEVOEGDHEID
1E GRAAD HALEN?

Bij Hogeschool Utrecht kunt u doorstuderen voor een Master of Education Wiskunde.

Kom naar een van de open dagen of kijk op **www.master.hu.nl** voor meer informatie.

ER VALT NOG GENOEG TE LEREN

INSTITUUT
ARCHIMEDES
HOGESCHOOL
UTRECHT