Een kijkje in de keuken van de Wiskunde Olympiade

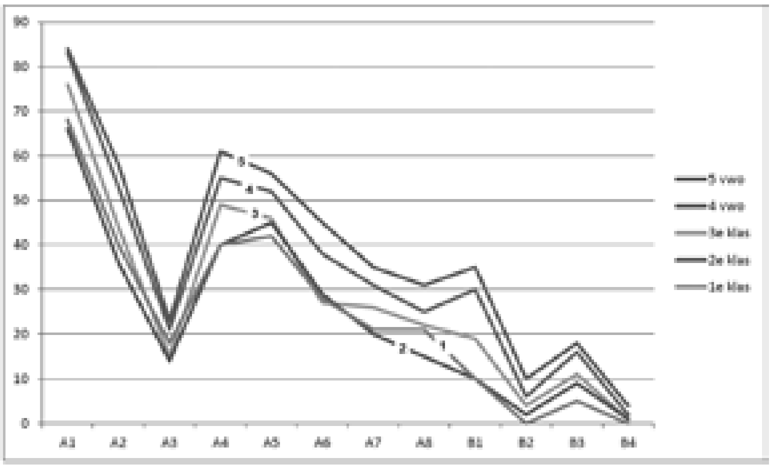
DEEL 2

[Quintijn Puite]

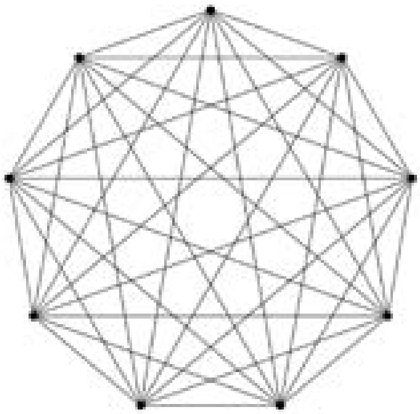
Op vrijdag 27 januari j.l. deden op 270 scholen 5612 leerlingen, onder wie 2013 meisjes (36%), mee aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De beste 815 deelnemers zijn uitgenodigd om mee te doen aan de tweede ronde, die op vrijdag 23 maart op 12 universiteiten in het hele land plaatsvond. De opgaven van de tweede ronde treft u hierbij aan (zie figuur 7 op pag. 232).

In dit artikel bekijken we enkele opvallende statistieken die betrekking hebben op de *eerste* ronde.
De opgaven van de eerste ronde 2012 staan in de vorige editie van *Euclides* (nr. 87(5), pag. 193). Uitwerkingen van de eerste en de tweede ronde zijn te vinden op « *www.wiskundeolympiade.nl* ».

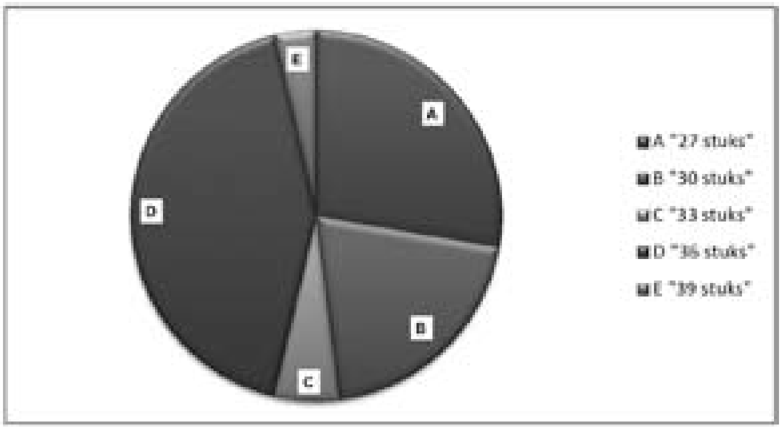
In figuur 1 ziet u het percentage van de kandidaten dat een bepaalde opgave goed had, uitgesplitst per klas. Wegens de relatief lagere deelnemersaantallen en voor de overzichtelijkheid hebben we daarin 5-havo en 4-havo buiten beschouwing gelaten.
Wat opvalt is de grotendeels dalende lijn, hetgeen aangeeft dat de opgaven behoorlijk op moeilijkheid waren gerangschikt. Maar A3 is hierop een grote uitzondering. Vrijwel alle klassen vonden deze opgave behoorlijk lastig; slechts ca. 1 op de 5 leerlingen uit elke categorie wist deze opgave te kraken. Hoe is dat te verklaren?
De opgave ging over het aantal gelijkbenige driehoeken dat te vinden is in een regelmatige negenhoek met al zijn diagonalen (***zie figuur 2***). Van de deelnemers antwoordde 43% optie D (36 stuks), vervolgens 28% optie A (27 stuks), en slechts 20% het correcte antwoord B (30 stuks); ***zie figuur 3***.
De enige andere A-opgave waarvan één van de foute antwoordopties vaker werd gekozen dan het goede antwoord, was opgave A7 over de zes kaartjes met positieve gehele getallen (waar B vaker werd gekozen dan het goede antwoord D).
Vermoedelijk hadden een hoop deelnemers bij opgave A3 wel de slimme strategie bedacht om te kijken hoeveel gelijkbenige driehoeken er per hoekpunt zijn. Dat zijn er 4 – zie de zwarte (Z), rode (R), blauwe (B) en groene (G) driehoek ***in figuur 4***. En 9 maal 4 is 36, dus zo kom je tot antwoord D.
Anderen hebben wellicht de gelijkzijdige driehoek (de blauwe, B) niet meegeteld omdat ze dachten dat die niet gelijkbenig was en kwamen zo tot 9 maal 3 is 27, dus antwoord A. Maar de opgavencommissie had – om dit te voorkomen – juist expres bij de opgave een opmerking gezet dat een driehoek gelijkbenig is als twee of drie zijden dezelfde lengte hebben. Dus wat ook zou kunnen, is dat de mensen die op A uitkwamen juist de eerste methode (die tot antwoord D leidde) hebben gevolgd, maar zich realiseerden dat je dan de gelijkzijdige driehoek meerdere keren tegenkomt (namelijk 3 en 6 hoekpunten verder), waarna ze zich maar tot 9 maal 3 is 27 hebben beperkt. Tsja, dan ben je er bijna, want die gelijkzijdige driehoeken moeten natuurlijk wel worden meegeteld. Maar dan wel slechts één keer elk; dus het correcte antwoord is 27 + 3 = 30. Het addertje onder het gras (het dubbeltellen van de gelijkzijdige driehoek) maakte dit toch al niet-triviale telprobleem (hoe ga je zoiets überhaupt tellen?) blijkbaar een stuk lastiger dan vooraf was ingeschat door de opgavencommissie.
Bij opgave A8 over patroon herkennen in de rij 27, 1, 2012, 26, 0, 2011, …, waarover Birgit van Dalen in de vorige editie van *Euclides* schreef, valt het op dat de eersteklassers beter scoren dan de tweedeklassers. Het was wel een van de pittigste A-opgaven, maar blijkbaar konden jongere leerlingen hier bijna net zo goed mee uit de voeten als de leerlingen met al wat meer wiskundige bagage.
Tot slot valt bij de B-opgaven op dat B3 beter is gemaakt dan B2. Opgave B2 was een behendige plak-en-knipmeetkunde opgave waarin een halve cirkel en een overlappende gelijkzijdige driehoek de hoofdrol speelden, terwijl het er bij B3 om ging voor welke rechthoeken in het rooster er geldt dat er evenveel hokjes wel als niet aan de rand van de rechthoek liggen. (In feite werd er gevraagd naar het aantal hokjes van zulke rechthoeken.) Hoewel B3 algebraïsch nog best pittig is, kon men hier ook met goed proberen uitkomen, iets wat niet gold voor B2. Als opgave B3 echter in de tweede ronde zou hebben gezeten als C-opgave, dan was een volledige uitwerking nodig geweest en hadden de leerlingen dus echt moeten bewijzen dat de antwoorden 48 (8 maal 6) en 60 (12 maal 5) de *enige* mogelijkheden zijn; ***zie figuur 5 en figuur 6***. De opgave was dan waarschijnlijk veel moeilijker geweest. Maar nu was het voldoende als men, op wat voor manier dan ook, deze oplossingen vond, bijvoorbeeld meetkundig zoals in de illustraties.



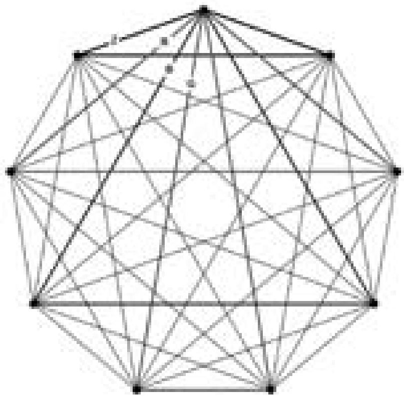
figuur 1 Percentage goede antwoorden per opgave, per categorie



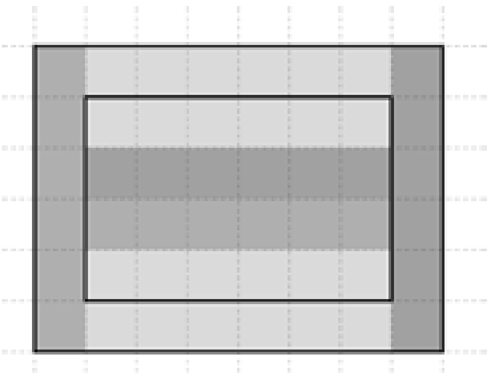
figuur 2 Regelmatige negenhoek met alle diagonalen



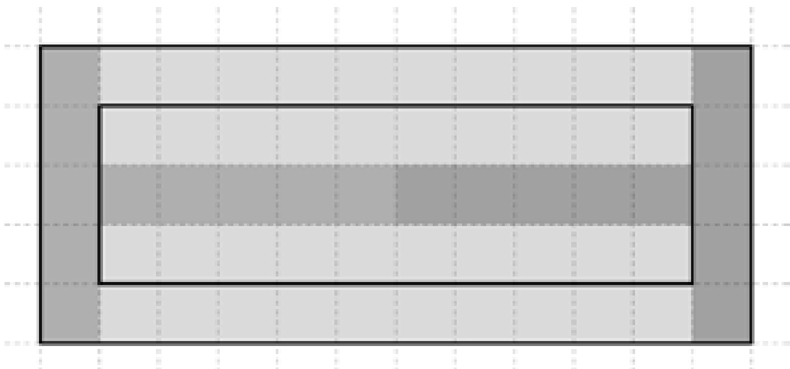
figuur 3 Verdeling van de antwoorden gegeven bij opgave A3



figuur 4



figuur 5



figuur 6

figuur 7 Opgaven NWO 2012, 2e ronde

B-opgaven

Bij de B-opgaven is het antwoord steeds een getal, dat je op het antwoordformulier moet invullen. Een goed antwoord levert 4 punten op, een fout antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is. LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{11}{81}$ of 5^8 of $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+\pi)$.

B1. In deze optelsom staat elke letter voor een cijfer (0 tot en met 9). Verschillende letters staan voor verschillende cijfers.
Bepaal de waarde van W × R.

```
T W E E D E
  R O N D E +
-------------
2 3 0 3 1 2
```

B2. Alle 2012 kamelen in Nederland moeten verdeeld worden over 40 weides. Geen twee weides mogen hetzelfde aantal kamelen krijgen. De weide in het centrum van Amsterdam moet het grootste aantal kamelen krijgen.
Hoeveel kamelen moeten daar minimaal komen te staan?

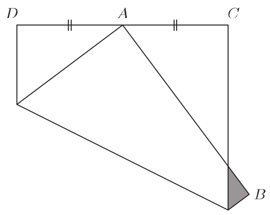
B3. Eén van de vier kabouters Anne, Bert, Chris en Dirk heeft goud gestolen van de koning. De kabouters, die elkaar door en door kennen, doen hierover elk twee uitspraken. Als een kabouter een leugenaar is, is minstens één van die twee uitspraken een leugen. Is een kabouter geen leugenaar, dan zijn beide uitspraken waar.

Anne zegt: "Bert is een leugenaar." en "Chris of Dirk heeft het gedaan."
Bert zegt: "Chris is een leugenaar." en "Dirk of Anne heeft het gedaan."
Chris zegt: "Dirk is een leugenaar." en "Anne of Bert heeft het gedaan."
Dirk zegt: "Anne is een leugenaar." en "Bert of Chris heeft het gedaan."

Hoeveel van deze acht uitspraken zijn waar?

B4. Op elk van de 10.000 velden van een 100 × 100-schaakbord staat een getal. Op de bovenste rij staan van links naar rechts de getallen 0 tot en met 99. In de linkerkolom staan van boven naar beneden de getallen 0 tot en met 99. De som van vier getallen in een 2 × 2-blokje is altijd 20.
Welk getal staat helemaal rechtsonder op het bord?

B5. Een vierkant $ABCD$ met zijde 8 wordt zodanig gevouwen dat hoekpunt A met het midden van CD samenvalt (zie figuur).
Wat is de oppervlakte van het grijze driehoekje?



C-opgaven

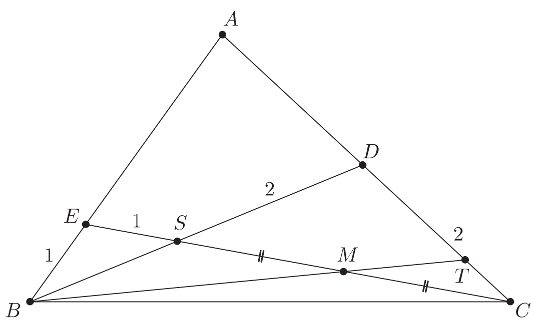
Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; ook je redenering en de manier van oplossen moet je duidelijk opschrijven. Maak elke C-opgave op een apart vel papier. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook (per opgave!) je kladpapier in.

C1. Je hebt één kaartje met daarop het getal 12. Je mag nieuwe kaartjes toevoegen aan je verzameling volgens de volgende regels.

- Als je al een kaartje met een getal a hebt, dan mag je een nieuw kaartje maken met daarop het getal $2a+1$.
- Als je al een kaartje met een getal b hebt dat deelbaar is door 3, dan mag je een nieuw kaartje maken met daarop het getal $\frac{b}{3}$.

(a) Laat zien dat je een kaartje met daarop het getal 29 kunt maken.
(b) Laat zien dat je een kaartje met daarop het getal $2^{2012}-1$ kunt maken.
(c) Laat zien dat je nooit een kaartje met daarop het getal 100 kunt maken.

C2. Gegeven is een driehoek ABC met op lijnstuk AC een punt D en op lijnstuk AB een punt E. Het snijpunt van BD en CE noemen we S. Het midden van lijnstuk CS noemen we M. De lijn BM snijdt lijnstuk CD in punt T. Ten slotte is gegeven dat $|BE| = |ES| = 1$ en $|CD| = |DS| = 2$.
Bewijs dat $|AB| = |AT|$.
Je moet je redenering stap voor stap in tekst en formules opschrijven. Dingen die alleen in het plaatje aangegeven zijn, leveren geen punten op.



Over de auteur
Quintijn Puite is een van de organisatoren van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, waarvoor hij twee dagen per week verbonden is aan de Eindhoven School of Education van de Technische Universiteit Eindhoven. Daarnaast is hij docent bij de Vakgroep Wiskunde van Instituut Archimedes, de lerarenopleiding van Hogeschool Utrecht.
E-mailadres: *quintijn@wiskundeolympiade.nl*