Een kijkje in de keuken van de Wiskunde Olympiade

[Birgit van Dalen]

Op vrijdag 27 januari j.l. ging een nieuwe editie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade van start, met de eerste ronde die werd gehouden op bijna 300 scholen in Nederland. Op deze pagina's vindt u enkele opgaven van deze wedstrijdronde nog eens terug. Eén van de organisatoren van de olympiade, Birgit van Dalen, geeft u bovendien een kijkje in de keuken van de samenstellers van de wedstrijd.

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade is een wedstrijd die jaarlijks door ruim 5000 havo/vwo-scholieren in heel Nederland wordt gemaakt. Het deelnemersveld is verspreid over klas 1 tot en met 5. Een speciale opgaven-commissie is belast met de uitdagende taak om voor al deze leerlingen een leuke en geschikte wedstrijd samen te stellen. Deze commissie bestaat voornamelijk uit docenten en oud-docenten, aangevuld met enkele studenten die zelf aan de Internationale Wiskunde Olympiade deelgenomen hebben.

Al enkele maanden voordat de wedstrijd plaatsvindt, komt de opgavencommissie in het diepste geheim bij elkaar om een selectie te maken van de opgaven. Die tijd is nodig omdat er daarna nog zorgvuldig wordt gekeken naar de formuleringen van de opgaven, de antwoordopties bij de meerkeuzevragen en de plaatjes die erbij gegeven worden. Is de vraag wel duidelijk? Staan er geen termen in die onbekend zijn bij onderbouwleerlingen? Is het antwoord eenduidig? Wordt er niet per ongeluk iets weggegeven dat we niet weg willen geven? Kun je met behulp van de antwoordopties niet op een flauwe manier achterhalen welk antwoord goed is? Kun je uit het plaatje niet het antwoord aflezen, en is het plaatje niet misleidend?

Vaak gaan er wel een stuk of zes versies overheen voordat iedereen tevreden is. Pas dan worden er uitwerkingen gemaakt, en ook die worden minutieus bestudeerd.

De uitwerkingen zijn bij voorkeur kort en elegant, maar moeten de leerlingen weer niet het gevoel geven dat ze dit nooit hadden kunnen bedenken. Bovenal moeten ze natuurlijk duidelijk zijn.

Ook de opgaven zelf moeten aan hoge eisen voldoen. Zo is het, om alle leerlingen met plezier te laten deelnemen aan de eerste ronde, essentieel dat de opgaven toeganke-lijk zijn, zeker de eerste paar opgaven. Dat een opgave toegankelijk is, wil nog niet zeggen dat hij makkelijk is, maar wel dat leerlingen er mee aan de slag kunnen en het gevoel hebben iets te kunnen bereiken bij de opgave. Neem bijvoorbeeld opgave A8 (die toevallig van mijn eigen hand is). Bij het verzinnen van deze opgave heb ik juist die toegankelijkheid in het achterhoofd gehouden. Als opgavencommissie vonden we dit wel een pittige opgave, maar dat neemt niet weg dat elke leerling iets kan met de opgave.

Met behulp van de eerste drie getallen van de rij, die al gegeven zijn, en de som van elke drie opeenvolgende getallen die bekend is, kun je het vierde getal in de rij uitrekenen. Als je dat vierde getal eenmaal berekend hebt, kun je ook het vijfde getal uitrekenen. En dan het zesde. Als je dan nog geen patroon ziet, kun je gewoon nog even doorgaan. Vroeg of laat zal elke leerling met een beetje doorzettings-vermogen het patroon in de rij herkennen. (Ik zal het patroon hier niet verklappen voor de lezers die graag zelf nog met de opgaven aan de slag willen.) Of de opgave uiteindelijk tot een goed einde wordt gebracht, hangt onder andere nog af van de nauwkeurigheid en rekenvaardigheid van de leerling, maar het belangrijkste is dat elke leerling tijdens de wedstrijd het gevoel zal hebben de opgave aan te kunnen.

Nog meer van die opgaven waar je zó aan kunt beginnen zijn A1 (enkele van de getallen op de sterretjes kun je direct uitrekenen), A3 (begin maar gewoon met tellen) en in iets mindere mate A2 (probeer zo klein mogelijke palindroomgetallen te verzinnen) en A7 (neem eens zes getallen en kijk hoeveel verschillende uitkomsten van de sommen je dan krijgt).

Het zijn allemaal opgaven waar daarnaast nog wel een wiskundige hobbel genomen moet worden om hem helemaal te kraken; met alleen wat proberen kom je er niet. Ook dat is een belangrijke eigenschap van olympiadeopgaven, want daarmee wordt de verzameling opgaven een wedstrijd waarbij de meest getalenteerde leerlingen komen bovendrijven.

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 27 januari 2012

- Beschikbare tijd: 2 uur.
- De A-vragen zijn vijfkeuzevragen. Bij elke vraag is één van de vijf mogelijkheden juist. Geef op het antwoordformulier duidelijk de letter van het goede antwoord aan. Voor een goed antwoord krijg je 2 punten, voor een fout antwoord 0 punten.
- Bij de B-vragen moet je een of meerdere getallen als antwoord geven. Voor een goed antwoord krijg je 5 punten en voor een fout antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.
  LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{11}{12}$ of $2+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{2}\pi+1$.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken, geen formulekaart en geen schaar; alleen pen en papier, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

A-vragen

A1. Op de plaatsen van de sterretjes staan positieve gehele getallen op zo'n manier dat de vermenigvuldigingstabel hiernaast klopt.
Wat is het grootste getal dat meer dan één keer voorkomt in de 5×5-tabel?

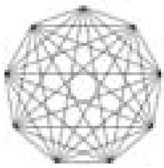
$\times$	*	*	*	7
*	24	*	*	56
*	*	36	8	*
*	*	27	6	*
6	18	*	*	42

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 18

A2. Een palindroomgetal is een getal dat van links naar rechts gelezen hetzelfde is als van rechts naar links gelezen, zoals 707 en 154451. Leon maakt een lijst van alle palindroomgetallen van vijf cijfers (getallen beginnen niet met een 0), gesorteerd van klein naar groot.
Wat is het 12e getal op Leons lijst?

A) 11111 B) 11211 C) 12221 D) 12321 E) 12421

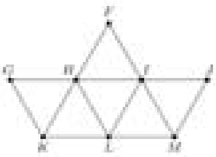
A3. Hiernaast zie je een regelmatige negenhoek met al zijn diagonalen.
Hoeveel gelijkbenige driehoeken zijn er waarvan de drie verschillende hoekpunten ook hoekpunten van de negenhoek zijn?
(Een driehoek is gelijkbenig als twee of drie zijden dezelfde lengte hebben.)



A) 27 B) 30 C) 33 D) 36 E) 39

A4. Hieronder zie je een bouwplaat waarmee je een zogen…
dipiramide zie je in het plaatje rechts.
Welke drie punten uit de bouwplaat worden na het vou…

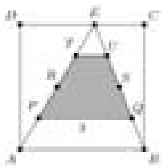
A) F, G en L B) H, I en M C) G, …
D) H, K en L E) F, I en K



A5. Frank heeft een la waarin allemaal losse sokken zitten. Er zitten 10 rode sokken in en de rest van de sokken is blauw. Hij gaat blind een aantal sokken uit de la pakken en wil daarna twee sokken van een bepaalde kleur hebben. Om zeker te zijn van minstens twee rode sokken moet hij twee keer zoveel sokken pakken als om zeker te zijn van minstens twee blauwe sokken.
Hoeveel sokken zitten er in totaal in de la?

A) 14 B) 18 C) 20 D) 32 E) 40

A6. Op zijde CD van een vierkant $ABCD$ ligt een punt E. Lijnstuk AE wordt door de punten P, R en T in vier gelijke stukken verdeeld. Lijnstuk BE wordt door de punten Q, S en U in vier gelijke stukken verdeeld. Gegeven is dat $|PQ|=3$.
Wat is de oppervlakte van vierhoek $PQUT$?



A) $\frac{15}{4}$ B) 4 C) $\frac{17}{4}$ D) $\frac{9}{2}$ E) 5

A7. Carry heeft zes kaarten. Op elke kaart staat een positief geheel getal geschreven. Zij kiest drie kaarten en rekent de som uit van de getallen op die kaarten. Zij doet dit voor alle 20 mogelijke combinaties van drie kaarten. Tienmaal krijgt Carry als uitkomst 16 en tienmaal uitkomst 18.
Wat is het kleinste getal dat op de kaarten voorkomt?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

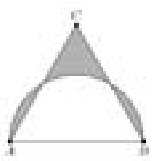
A8. We bekijken een rij getallen die met $27, 1, 2012, \ldots$ begint. Voor deze rij getallen geldt het volgende. Als we de getallen op plek 1, 2 en 3 in de rij optellen, krijgen we 2040. Van de getallen op plek 2, 3 en 4 is de som 2039 en van de getallen op plek 3, 4 en 5 is de som 2038, enzovoorts. Algemeen geldt dus: de getallen op plek k, $k+1$ en $k+2$ samen zijn $2041-k$.
Welk getal staat er op plek 2013 in de rij?

A) -670 B) -669 C) 670 D) 1341 E) 1342

B-vragen

B1. We bekijken alle getallen van vijf cijfers. Hiervan zijn er a met de eigenschap dat het product van de cijfers gelijk is aan 25, en b met de eigenschap dat het product van de cijfers gelijk is aan 15.
Bepaal $\frac{a}{b}$.

B2. Een gelijkzijdige driehoek ABC heeft zijde 12. Een halve cirkel met middellijn AB snijdt de zijden AC en BC.
Bepaal de totale oppervlakte van het grijze gebied dat bestaat uit de twee cirkelsegmenten buiten de driehoek en het deel van de driehoek buiten de cirkel.



B3. Een aantal hokjes van een vel ruitjespapier vormen samen een rechthoek. Van deze hokjes liggen er evenveel wel als niet aan de rand van de rechthoek.
Hoeveel hokjes telt de rechthoek in totaal? Geef alle mogelijkheden.

De leden van de opgavencommissie dragen elk diverse opgaven aan die zij mogelijk geschikt vinden voor de wedstrijd. Alles bij elkaar is er dan een grote collectie om uit te kiezen. Tijdens de vergadering van de commissie worden de opgaven allemaal langsgelopen en zorgvuldig beoordeeld op geschiktheid en moeilijkheid. Vervolgens selecteert de commissie twaalf opgaven die samen een gebalanceerde set vormen: voldoende variatie wat betreft onderwerpen (figuren, getallen, tellen, enzovoorts) en wat betreft moeilijkheidsgraad. We proberen de moeilijkheid van de opgaven zodanig te kiezen dat elke leerling die serieus aan de opgaven werkt, minstens één opgave correct op weet te lossen. Daarbij is het ook van belang dat er slechts enkele opgaven zijn waarbij voorkennis uit de derde klas nodig is; de rest moet zonder dergelijke voorkennis te doen zijn. Weliswaar hebben leerlingen uit de onderbouw minder punten nodig om door te gaan naar de tweede ronde dan vierde- en vijfdeklassers, maar het is wel de bedoeling dat ze bijna alle opgaven in principe kunnen maken.
Natuurlijk moet de wedstrijd ook weer niet te makkelijk worden: we willen getalenteerde leerlingen graag prikkelen en uitdagen met de opgaven. Bovendien moeten de scores van het hele deelnemersveld voldoende gespreid zijn om uiteindelijk de 800 leerlingen te kunnen selecteren die door mogen naar de tweede ronde. Daar zullen zij opnieuw pittige opgaven voor hun kiezen krijgen, die iets meer van hen vragen dan bij de eerste ronde. Opnieuw is dan de opdracht aan onze opgavencommissie om met een leuke, geschikte en zorgvuldig samengestelde wedstrijd te komen.

Over de auteur
Birgit van Dalen is docent wiskunde op het Aloysius College in Den Haag. Daarnaast is ze betrokken bij de organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en de training van leerlingen voor de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO).
E-mailadres: *bevandalen@gmail.com*