Tijdens IMO2011

AMSTERDAM - OPGAVE 4

[Merlijn Staps]

Van 13 tot en met 24 juli 2011 vond in Amsterdam de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. 564 leerlingen uit 101 landen hebben twee dagen lang hun tanden gezet in een zestal pittige wiskundeopgaven; opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe die opgaven er uit zien? En wat de deelnemers hierin zo aantrok? U heeft het in de vanaf maart vorig jaar verschenen nummers van *Euclides* kunnen lezen. In dit op één na laatste artikel in de serie wordt een opgave van IMO2011 besproken door een lid van het Nederlandse team.

De opgave

Zij $n > 0$ een geheel getal. We hebben een balans en n gewichten met massa $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. We moeten de n gewichten, één voor één, op één van de twee schalen van de balans plaatsen zo dat de rechterschaal nooit zwaarder is dan de linkerschaal. In elke stap kiezen we een gewicht dat nog niet op de balans staat en plaatsen het op de linker- of op de rechterschaal, totdat alle gewichten op de balans geplaatst zijn. Bepaal het aantal manieren waarop we dit kunnen doen.

Uitwerking

De opgaven van de IMO komen uit vier categorieën: algebra, combinatoriek, meetkunde en getaltheorie. De bovenstaande is een duidelijke combinatoriekopgave omdat er gevraagd wordt een bepaald aantal manieren te tellen om iets te doen (in dit geval het plaatsen van gewichten op een balans zodat aan bepaalde voorwaarden is voldaan). Met name bij dit soort opgaven (maar eigenlijk bij iedere opgave) is het nuttig om wat speciale gevallen te bekijken. Dit geeft ons een idee van de opgave, en bovendien kunnen we zo een vermoeden krijgen wat het antwoord wordt. Het antwoord op de gestelde vraag is hoogstwaarschijnlijk een functie in termen van n, bijvoorbeeld n^2 of 3^n. Door 'kleine gevalletjes' uit te rekenen zien we hopelijk een patroon zodat we een vermoeden krijgen van het antwoord. Daarna kunnen we dan proberen om dat vermoeden daadwerkelijk te bewijzen.

Het is nu ook goed om wat notatie in te voeren: we geven het aantal manieren om de gewichten op de balans te plaatsen voor een zekere n aan met $A(n)$.
We beginnen met $n = 1$. In dit geval hebben we één gewicht met massa $2^0 = 1$. Omdat de rechterschaal niet zwaarder mag zijn dan de linkerschaal, moeten we dit gewicht links plaatsen. Er is dan dus precies één manier; dus $A(1) = 1$. Dit lijkt wellicht een wat flauw geval, maar het geeft ons toch nuttige informatie over het gedrag van $A(n)$.
Voor $n = 2$ hebben we twee gewichten, één met massa 1 en één met massa 2. Als we het gewicht met massa 1 eerst plaatsen, moeten we dat op de linkerschaal plaatsen en daarna het gewicht met massa 2 ook op de linkerschaal, om te verhinderen dat de rechterschaal zwaarder wordt dan de linker. Als we het gewicht met massa 2 eerst plaatsen moeten we dat op de linkerschaal plaatsen, en daarna hebben we voor het gewicht met massa 1 twee mogelijkheden: links of rechts. In totaal zijn er dus $1 + 2 = 3$ mogelijkheden; dus $A(2) = 3$.
We bekijken nu het geval $n = 3$. Nu hebben we drie gewichten met massa's 1, 2 en 4. Om $A(3)$ te bepalen gaan we systematisch te werk: we bekijken per mogelijke volgorde van de gewichten op hoeveel manieren we ze kunnen plaatsen en tellen daarna al die mogelijkheden op (eigenlijk net wat we bij $n = 2$ deden). Er zijn $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mogelijke volgordes. Voor de volgorde (1, 2, 4) hebben we één mogelijkheid omdat we elk gewicht links moeten plaatsen. Voor de volgorde (1, 4, 2) geldt dat we 1 en 4 sowieso op de linkerschaal moeten plaatsen, en daarna hebben we voor het gewicht met massa 2 twee mogelijkheden. Door op vergelijkbare wijze te redeneren vinden we voor de volgordes (2, 1, 4), (2, 4, 1), (4, 2, 1) en (4, 1, 2) respectievelijk 2, 2, 4 en 4 mogelijkheden. Totaal zijn er dus $1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 = 15$ mogelijkheden; dus $A(3) = 15$.
We hebben nu dus dat $A(1) = 1$, $A(2) = 3$ en $A(3) = 15$. Er valt hier op dat iedere $A(n) + 1$ altijd een macht van 2 is.
Toch vond ik dit nog niet genoeg om daarop een vermoeden te baseren (want het is nog niet helemaal duidelijk welke tweemacht $A(n) + 1$ wordt); dus ik besloot om $A(4)$ te bepalen. Dit kost even tijd, maar we komen uit op $A(4) = 105$.
Omdat 106 geen tweemacht is, is het maar goed dat we dit geval hebben bekeken, anders hadden we misschien geprobeerd het foutieve vermoeden dat $A(n) + 1$ altijd een tweemacht is, te bewijzen. De ontbinding van $A(1)$ tot en met $A(4)$ in factoren staat in de volgende tabel:

n	$A(n)$	als product
1	1	1
2	3	3
3	15	$3 \cdot 5$
4	105	$3 \cdot 5 \cdot 7$

Op basis hiervan is het niet moeilijk om een vermoeden te ontwikkelen, namelijk

dat:

(1)… $A(n) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$

oftewel, $A(n)$ is het product van de eerste n oneven natuurlijke getallen.

Overigens maakte ik op de IMO bij het bepalen van $A(4)$ een rekenfout; ik kwam op 103 uit. Een patroon is dan natuurlijk niet te vinden, maar gelukkig ontdekte ik mijn fout op tijd.

Een strategie die (in ieder geval na een jaar intensief trainen) voor de hand ligt om uitdrukking (1) daadwerkelijk te bewijzen, is te laten zien dat:

(2)… $A(k) = (2k-1) \cdot A(k-1)$

voor $k \geq 2$. Als we deze recursie hebben aangetoond, geldt namelijk:

$$\begin{aligned} A(n) &= (2n-1) \cdot A(n-1) \\ &= (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot A(n-2) \\ &= (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot A(n-3) \\ &= \ldots \\ &= (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1 \end{aligned}$$

Hierbij hebben we (2) achtereenvolgens toegepast voor $k = n, n-1, \ldots, 2$ en ingevuld dat $A(1)$ gelijk is aan 1.

We gaan dus proberen om (2) te bewijzen. Het is goed om te beseffen waar $A(k)$ en $A(k-1)$ precies voor staan: $A(k)$ is het aantal manieren om de k gewichten op de balans te plaatsen. Dus $A(k)$ telt het aantal rijtjes van k stappen waarbij we in elke stap een gewicht op de balans plaatsen, en $A(k-1)$ is datzelfde, maar dan met $(k-1)$ gewichten, namelijk de gewichten $2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-2}$. Uiteraard bedoelen we hier alleen de rijtjes die voldoen aan de gegeven voorwaarde: de rechterschaal is nooit zwaarder dan de linker.

Mijn idee tijdens de IMO was om de rijtjes met k gewichten die voldoen, te construeren uit de rijtjes met $(k-1)$ gewichten die voldoen.

We doen dit als volgt.

Bekijk een rijtje van $(k-1)$ stappen waarbij we in elke stap één van de gewichten $2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-2}$ op de balans zetten, zodat is voldaan aan de voorwaarde dat de rechterschaal nooit zwaarder is dan de linkerschaal. We maken nu de observatie dat de gewichten op de linkerschaal samen ook altijd minstens 1 zwaarder zijn dan de gewichten op de rechterschaal samen. Laat namelijk op een bepaald moment 2^a de massa zijn van het tot dan toe zwaarste gewicht dat we hebben geplaatst.

Omdat:

$2^a > 2^a - 1 = 2^{a-1} + 2^{a-2} + \ldots + 2 + 1$

kunnen we dit gewicht niet rechts hebben geplaatst: het is immers zwaarder dan alle andere gewichten die we gebruikt kunnen hebben bij elkaar. Dus dit gewicht moeten we links geplaatst hebben. Omdat de massa op de linkerschaal nu minstens $2a$ is en die op de rechterschaal hoogstens $2^{a-1} + 2^{a-2} + \ldots + 2 + 1$, geldt inderdaad dat het verschil in massa tussen links en rechts minimaal 1 is.

Als we nu de massa's van alle gewichten uit ons rijtje met $(k-1)$ stappen met een factor 2 vermenigvuldigen, krijgen we een rijtje van $(k-1)$ stappen waarbij we de gewichten met massa's $2^1, \ldots, 2^{k-1}$ op de balans zetten. Dit voldoet nu nog steeds aan de voorwaarde dat links altijd zwaarder is dan rechts, en bovendien geldt nu dat het verschil in massa tussen links en rechts altijd minimaal 2 is. We willen dit nu voltooien tot een rijtje van k stappen door het gewicht met massa $2^0 = 1$ ergens in te voegen. We kunnen dit gewicht op k plekken invoegen en dan kiezen of we dat op de linkerschaal of op de rechterschaal zetten.

Al met al geeft dit $2k$ mogelijkheden. Het is echter niet zo dat al deze $2k$ mogelijkheden automatisch voldoen. Het zou kunnen dat door het invoegen van het gewicht met massa 1 op een bepaald moment de rechterschaal zwaarder is geworden dan de linkerschaal. Dit is precies het geval als we het gewicht met massa 1 helemaal aan het begin invoegen en hem op de rechterschaal plaatsen. Omdat op andere momenten het verschil tussen links en rechts in het oorspronkelijke rijtje minstens 2 was, is dit nog steeds minstens 1 na het toevoegen van het gewicht met massa 1 (ook al is dat op de rechterschaal). Dus zo kunnen we uit ieder rijtje van $(k-1)$ stappen $(2k-1)$ rijtjes van k stappen construeren die voldoen. Omdat we uit een rijtje van k stappen door het gewicht met massa 1 te verwijderen en door te delen door 2 ook weer een rijtje van $(k-1)$ stappen krijgen met de gevraagde eigenschappen, concluderen we dat (2) inderdaad waar is. Hiermee is ons bewijs afgerond.

Anders kan ook

Zoals bij veel IMO-opgaven is er echter meer dan één manier van oplossen. In plaats van uitdrukking (2) te bewijzen, zijn er ook andere manieren om $A(k)$ uit te drukken in de voorafgaande waarden van de rij $A(1), A(2), \ldots$

Een voorbeeld is de recursievergelijking:

(3)… $A(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} 2^i \cdot (i!) \cdot A(k-1-i)$

Deze recursievergelijking is, ondanks zijn wat afschrikwekkende uiterlijk, makkelijk af te leiden. Kijk bijvoorbeeld naar het zwaarste gewicht (dus 2^{k-1}) en neem aan dat we na dit gewicht nog i andere gewichten plaatsen. Dan is dus $0 \leq i \leq k-1$, en bovendien weten we dan dat het niet meer uitmaakt hoe we die i gewichten plaatsen: we moeten het zwaarste gewicht wel op de linkerschaal plaatsen (alle andere gewichten zijn immers samen lichter dan het zwaarste gewicht), en dan is de linkerschaal ook altijd zwaarder dan de rechterschaal. Om deze i gewichten uit te kiezen, hebben we $\binom{k-1}{i}$ mogelijkheden.

Er zijn $i!$ manieren om ze op volgorde te zetten en dan nog 2^i manieren om voor elk gewicht te kiezen op welke schaal we hem plaatsen. Samen is dus het aantal manieren gelijk aan:

$\binom{k-1}{i} 2^i \cdot (i!)$

Voor de eerste $(k-1-i)$ gewichten hebben we nu $A(k-1-i)$ manieren om ze te plaatsen (waarom?). Hierbij definiëren we $A(0)$ als 1. Al met al geeft dit, als er na het zwaarste gewicht nog i andere gewichten komen,

$\binom{k-1}{i} 2^i \cdot (i!) \cdot A(k-1-i)$

mogelijkheden. Dit sommeren voor $0 \leq i \leq k-1$ geeft dan precies $A(k)$. Dus hiermee hebben we relatie (3) aangetoond.

Nu is er alleen nog wat rekenwerk nodig om het bewijs af te ronden, dus laten zien dat $A(n) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ inderdaad aan (3) voldoet.

Er zijn bovendien ook nog andere manieren om (2) te bewijzen. Bij het napraten kwam een ander teamlid met het volgende bewijs.

We kiezen eerst een gewicht uit dat we *als laatste* gaan plaatsen. Dat kan op k manieren. We onderscheiden nu twee gevallen: namelijk, of het gewicht dat we als laatste gaan plaatsen, is het zwaarste gewicht met massa 2^{k-1}, of het is een ander gewicht.

Als het laatste gewicht het zwaarste gewicht is, hebben we voor de eerste $(k-1)$ gewichten nog $A(k-1)$ mogelijkheden (en we moeten dat zwaarste gewicht altijd op de linkerschaal plaatsen). Als het laatste gewicht niet het zwaarste gewicht is, hebben we voor de eerste $(k-1)$ gewichten ook $A(k-1)$ mogelijkheden en bovendien kunnen we bij het laatste gewicht kiezen of we dat links of rechts plaatsen, aangezien we het zwaarste gewicht al op de linkerschaal hebben geplaatst. De linkerschaal is nu al automatisch zwaarder dan de rechter. Voor elke keuze van het laatste gewicht geeft dit dus $2 \cdot A(k-1)$ mogelijkheden. Dus in totaal krijgen we voor het aantal mogelijkheden:

$$\begin{aligned} A(k) &= A(k-1) + (k-1) \cdot 2 \cdot A(k-1) \\ &= (1 + 2k - 2) \cdot A(k-1) \\ &= (2k-1) \cdot A(k-1) \end{aligned}$$

Waarmee uitdrukking (2) is bewezen.
De meeste leden van het team bedachten op de IMO een bewijs dat grotendeels lijkt op het eerste bewijs hierboven. Twee leden losten de opgave op door (3) af te leiden. Alle zes deelnemers van Nederland losten de opgave volledig op en kregen de maximale score van 7 punten voor hun uitwerking. En dat was voor maar 13 van de 101 landen weggelegd!

Websites

- IMO2011: *www.imo2011.nl*
- Opgaven 2011: *http://official.imo2011.nl/problems.aspx*
- IMO (international): *www.imo-official.org*
- IMO2011 op YouTube: *www.youtube.com/imo2011*
- Kennislink: *www.kennislink.nl/wiskunde*

Over de auteur

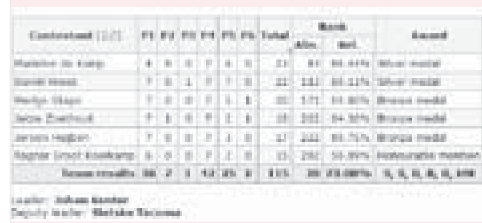
Merlijn Staps ging in 2009 als 'winnaar aanmoedigingsprijs' mee naar de IMO in Bremen, en in 2010 en 2011 zat hij daadwerkelijk in het team. Beide keren haalde hij een bronzen medaille. Verder deed hij in 2010 en 2011 mee aan de Benelux Wiskunde Olympiade (BxMO), waarbij hij twee keer de eerste prijs in de wacht sleepte. Na zijn eindexamen op het Corderius College in Amersfoort en het Junior College Utrecht gaat hij volgend jaar in Utrecht wiskunde en biologie studeren.
E-mailadres: *merlijnstaps@hotmail.com*

Persbericht / IMO 2011

Nederland scoort goed op Internationale Wiskunde Olympiade

Amsterdam, 23 juli 2011

Bij de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO), dit jaar gedurende 17-23 juli 2011 in Amsterdam, heeft het Nederlandse team 2 zilveren en 3 bronzen medailles gehaald en het eindigde op plaats 28 in een klassement van 101 landen.
Dit is de beste prestatie van Nederland op de IMO sinds de jaren tachtig. Van de zes Nederlandse teamleden behaalde Madelon de Kemp het hoogste puntenaantal. Ze eindigde op plaats 83 in een klassement van 564 deelnemers.



Bron: *http://official.imo2011.nl*

De allerbeste dit jaar is Lisa Sauermann uit Duitsland. Ze behaalde het hoogst mogelijke puntenaantal. Het hoogst eindigende land is de Volksrepubliek China.

Zie voor foto's en verder nieuws:
- *https://www.imo2011.nl/news*

Op de officiële IMO-site staan:
- de opgaven: *http://official.imo2011.nl/problems.aspx*
- en de uitslagen: *http://official.imo2011.nl/year_info.aspx?year=2011*

Voor filmpjes, zie:
- YouTube: *www.youtube.com/imo2011*

Bron: Wiskunde PersDienst / *www.wiskundepersdienst.nl*