Op weg naar IMO2011

EEN SCHOOLJAAR LANG TRAINEN

[Maarten Roelofsma]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken trof u in Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat. Dit keer een artikel over wat er aan deelname vooraf gaat.

In 2008 en 2009 ben ik als deelnemer mee geweest naar de IMO in Madrid en Bremen. Inmiddels ben ik tweedejaars student wis- en natuurkunde aan de Universiteit Utrecht. Sinds dit jaar ben ik betrokken bij het selectieproces en trainingsprogramma van de wiskunde-olympiade. Hieronder licht ik de opbouw van het trainingsjaar toe en sluit af met een van de opgaven uit de laatste selectietoets voor IMO2011.

Om uitgenodigd te worden voor de training moeten leerlingen zich door drie selectie-ronden knokken. De eerste ronde wordt op de scholen zelf gehouden waarna de besten door mogen naar de tweede ronde die op verschillende universiteiten plaatsvindt. Aan de finaleronde in Eindhoven doen de overgebleven 130 van circa 5000 leerlingen mee. Vanaf dit moment ben ik actief bij de olympiade betrokken met als eerste belangrijke taak het nakijken van de finaleronde. Het is leuk om met de andere nakijkers, voornamelijk oud-deelnemers, verrassend goede resultaten te zien van jonge, getalenteerde leerlingen. Uiteindelijk blijven er 25 deelnemers over die aan het intensieve trainingsprogramma gaan deelnemen.
Als trainer heb ik drie taken in het trainingsprogramma. Deze taken bestaan uit het nakijken van selectietoetsen, het wekelijks begeleiden van enkele deelnemers en het voorbereiden van trainingsbijeenkomsten. Het wekelijks begeleiden betekent dat ik feedback geef op ingestuurde uitwerkingen en aanwijzingen geef bij het schrijven van een uitwerking. Maandelijks zijn er trainingsbijeenkomsten; dit kan een dag zijn of een heel weekend. Hiervoor heb ik enkele sessies voorbereid waarin ik uitleg geef over een specifiek onderwerp en de deelnemers help met het maken van opgaven. Daarnaast is een belangrijk onderdeel van de dagen elkaar beter te leren kennen en is er ruimte voor gezelligheid en ontspanning.
In maart hebben de deelnemers een eerste selectietoets gemaakt. De beste deelnemers blijven in de race voor de IMO in Amsterdam. Deze groep mag als extra ook deelnemen aan de Benelux-Olympiade. De overige deelnemers blijven in training met het oog op de IMO in 2012 in Argentinië.
Vorige maand was de afsluitingsweek van het trainingsjaar in voorbereiding op IMO2011. De deelnemers die nog in de race waren voor deelname aan de IMO in Amsterdam, kregen twee afsluitende selectietoetsen. Uit die groep werd het IMO-team bestaande uit zes deelnemers en een reserve-deelnemer samengesteld. Deze laatste deelnemer heeft de aanmoedigingsprijs ontvangen als veelbelovend talent voor IMO2012.
Om een indruk te geven van de selectietoetsen werk ik de volgende opgave uit.

De opgave

Bepaal alle gehele getallen n waarvoor het polynoom $P(x) = 3x^3 - nx - n - 2$ te schrijven is als het product van twee niet-constante polynomen met gehele coëfficiënten.

Uitwerking

Bij opgaven waar je iets voor algemene n moet nagaan, helpt het op weg naar een oplossing om kleine gevallen te proberen. Zo krijgen we ideeën voor de oplossing met algemene n. We kijken hiervoor eerst naar het geval $n = 0$.

Voor $n = 0$ hebben we het polynoom $P(x) = 3x^3 - 2$. Hoe bepalen we nu of we kunnen factoriseren? Er geldt dat een factorisatie van de volgende vorm moet zijn:
$P(x) = (ax + b)(cx^2 + dx + e)$
waarbij a en c ongelijk aan 0 zijn. Door haakjes weg te werken en dit vervolgens gelijk te stellen aan $3x^3 - 2$ vinden we onder meer de vergelijkingen $ac = 3$ en $be = -2$. Met veel rekenwerk kunnen we dit wellicht oplossen, maar we gaan het eerst op een andere manier proberen (bovendien gaat het rekenwerk zeker niet lukken voor algemene n). Toch kunnen we een aantal van deze vergelijkingen goed gebruiken voor algemene n (bijvoorbeeld $ac = 3$ geldt voor algemene n).
Tot nu toe hebben we nog geen gebruik gemaakt van het feit dat we voor x waarden kunnen invullen. Omdat nulpunten een centrale rol bij polynomen spelen, is het logisch om hier als eerste naar te kijken.
De nulpunten van de factorisatie $P(x) = (ax + b)(cx^2 + dx + e)$ kennen we expliciet. De meest eenvoudige is $x = -\frac{b}{a}$.
Deze waarde vullen we in bij het geval $n = 0$; we hebben dan:
$0 = P(-\frac{b}{a}) = 3(-\frac{b}{a})^3 - 2$
Dat betekent dat $-\frac{b}{a} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Nu hebben we links een rationaal getal en rechts een niet-rationaal getal. Hieruit blijkt dat we bij $n = 0$ geen gehele getallen a en b kunnen vinden voor een factorisatie.
We hebben bij het proberen van het geval $n = 0$ al conclusies getrokken die ook gelden voor algemene n. We proberen nu voor algemene n iets soortgelijks te doen.
We beginnen direct met het invullen van het nulpunt $x = -\frac{b}{a}$; dat leidde bij $n = 0$ immers tot de oplossing. We krijgen nu:
$0 = P(-\frac{b}{a}) = 3(-\frac{b}{a})^3 - n\cdot(-\frac{b}{a}) - n - 2$
Hieruit halen we vervolgens de factor n en we krijgen dan:
$3(-\frac{b}{a})^3 - 2 = n(1 - \frac{b}{a})$
Als $a = b$ is dit voor geen enkele waarde van n waar. We kunnen dus zonder probleem delen door de factor $(1 - \frac{b}{a})$. Het resultaat is een uitdrukking voor n in a en b:

$$n = \frac{3(-\frac{b}{a})^3 - 2}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{3(\frac{b}{a})^3 + 2}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{3b^3 + 2a^3}{ba^2 - a^3}$$

Met dit resultaat hebben we het probleem van het vinden van alle n vertaald naar het vinden van de mogelijke waarden voor a en b. Voor a hadden we al de volgende voorwaarde gevonden: $ac = 3$. Dat betekent dus dat $a = \pm1, \pm3$.
Over b weten we nog weinig. Merk op dat we niet, zoals in het geval $n = 0$, kunnen afleiden dat $be = -2$. We moeten hiervoor dus iets anders bedenken.
Het bekijken van de nulpunten van $cx^2 + dx + 3$ lijkt geen goed idee: de nulpunten bevatten immers wortels of hoeven zelfs helemaal niet te bestaan. We proberen dus iets anders dan een nulpunt in te vullen. We willen echter wel dat dit onafhankelijk is van n. Invullen van $x = -1$voldoet hier precies aan: we vinden dat $P(-1) = -5$ voor alle n. We vullen in de factorisatie $x = -1$ in; we krijgen dan:
$(-a + b)(c - d + e) = -5$
Daaruit volgt dat $b - a$ een deler is van -5; dus $b - a = \pm1, \pm5$. Voor elke mogelijke a houden we dus 4 mogelijkheden voor b over.
In principe kunnen we al deze mogelijke combinaties afzonderlijk uitrekenen. Het is echter verstandig om eerst na te gaan of je niet een aantal gevallen eenvoudig kan wegstrepen. We zien bijvoorbeeld dat als we een factorisatie van $P(x)$ hebben, we beide termen met -1 kunnen vermenigvuldigen. We hebben dan nog steeds een factorisatie, namelijk $P(x)= (-ax - b)(-cx^2 - dx - e)$. Het is dus voldoende alleen de mogelijkheden $a = 1$ en $a = 3$ te bekijken. We houden acht mogelijkheden over.
Het is mogelijk om deze acht mogelijkheden afzonderlijk uit te werken; het aantal mogelijkheden is immers te overzien. Er is echter een mooie manier om dit aantal tot vier terug te brengen. Merk hiervoor op dat we bij een factorisatie van $P(x)$ de getallen a en b relatief priem kunnen kiezen. De grootste gemene deler van a en b kunnen we immers in de factor $cx^2 + dx + e$ stoppen. We bekijken nu de uitdrukking voor n en zien dat $ba^2 - a^3$ een deler is van $3b^3 + 2a^3$. Dus in het bijzonder is a^2 een deler van $3b^3 + 2a^3$. Dit betekent dat a^2 een deler is van $3b^3$. Gebruiken we nu dat we a en b relatief priem kunnen kiezen, dan vinden we dat a^2 een deler is van 3. Dit betekent dat $a = 1$.
We hebben de opgave beperkt tot vier mogelijkheden. Deze blijken ook allemaal een factorisatie op te leveren. Het geval $a = 1$, $b - a = 5$ werken we expliciet uit. Er geldt dan dat $b = 6$ waaruit volgt dat $n = 130$. We delen nu de factor $x + 6$ uit het polynoom $P(x) = 3x^3 - 130x - 132$; dit doen we door een staartdeling. We krijgen dan:

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^2(x+6) - 18x^2 - 130x - 132 \\ &= 3x^2(x+6) - 18x(x+6) - 22x - 132 \\ &= 3x^2(x+6) - 18x(x+6) - 22(x+6) \\ &= (x+6)(3x^2 - 18x - 22) \end{aligned}$$

We zien dat er voor $n = 130$ een factorisatie mogelijk is. Op dezelfde wijze vinden we dat de drie overige gevallen, $n = -2, 26, 38$, ook een factorisatie opleveren.
We concluderen dat het polynoom te factoriseren is voor $n = -2, 26, 38$ en 130.

Tot slot

Voor mij was het afgelopen trainingsjaar een bijzondere ervaring. Het was leuk om me met een groep oud-deelnemers in te zetten bij de voorbereiding van de deelnemers op de IMO in Amsterdam. Op het eerste gezicht is het misschien jammer dat je geen buitenlandse reis maakt, maar juist bij een thuiswedstrijd is er extra aandacht vanuit het eigen land. Ook de deelnemers uit andere landen tonen extra aandacht voor het organiserende land. Dit in combinatie met de training biedt alle mogelijkheden voor een fantastisch resultaat.

Over de auteur
Maarten Roelofsma is tweedejaars student wis- en natuurkunde aan de Universiteit Utrecht. In 2008 en 2009 heeft hij deelgenomen aan de internationale olympiade in respectievelijk Madrid en Bremen. Daarnaast nam hij in 2009 deel aan de eerste Benelux-Olympiade met als resultaat een zilveren medaille. Momenteel is hij betrokken bij de organisatie van IMO2011 die in juli plaatsvindt, en traint hij de deelnemers aan deze olympiade.
E-mailadres: *maarten.r91@hotmail.com*