# ZEVEN MAANDEN TRAINEN

**In januari vond de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade plaats. De ruim honderd beste deelnemers (uit verschillende klassen) worden uitgenodigd om op 12 september 2008 mee te doen aan de tweede ronde op de Technische Universiteit Eindhoven. En als je daar hoog scoort, word je uitgenodigd voor een intensief trainings- en selectieprogramma. In juni 2009 worden uit deze circa twintig kandidaten de zes teamleden geselecteerd om Nederland te vertegenwoordigen bij de Internationale Wiskunde Olympiade in juli 2009 in Duitsland. Waarom is dat nodig, zo'n intensief trainingstraject? En hoe ziet die training er eigenlijk uit?**

■ door Birgit van Dalen en Quintijn Puite

De eerste Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) vond plaats in Roemenië in 1959. Sinds die tijd is het niveau van de opgaven steeds hoger geworden. Wil je enige kans maken, dan moet je behalve de schoolwiskunde nog een hoop meer van wiskunde hebben gezien. Daarom worden de deelnemers ruim een half jaar getraind in diverse wiskundige technieken die kunnen helpen bij het oplossen van de opgaven.

Naast de koordenvierhoekstelling en de bissectricestelling zie je bijvoorbeeld ook de cirkel van Apollonius, de rechte van Wallace, de stelling van Ceva en de stelling van Menelaos. Verder krijg je onderwerpen die pas op de universiteit aan bod komen, zoals getaltheorie en algebra. Na een paar maanden training kijk je niet meer raar op van woorden als modulorekenen, restklasse, polynoom of Euler-$\varphi$-functie. Ook ongelijkheden van meerdere veranderlijken, zoals $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, en algemene bewijsmethoden, zoals inductie en het ladenprincipe, komen aan bod. Hieronder kun je lezen over een probleem uit de combinatoriek dat op de training wordt behandeld.



De training start met een trainingsweekend half november. Vanaf dat moment krijg je elke week een setje van vier opgaven thuisgestuurd om aan te werken, dat vervolgens door een van de begeleiders wordt nagekeken. Verder is er iedere maand een trainingsdag en in februari een tweede trainingsweekend; dat zijn de momenten dat je echt nieuwe theorie leert. Bij het zelf werken aan de opgaven kun je de theorie dan proberen toe te passen. In de week na het Centraal Examen (in juni) is de afsluitende trainingsweek, die eindigt met een eindtoets. Vanaf dan is het team van zes leerlingen bekend en die gaan er natuurlijk nog even een maand heel hard tegenaan!

Kandidaat-teamleaden trainen voor de IMO komende zomer (foto: Bart van Overbeeke)

**PAASEIEREN VERVEN** De paashaas staat op het punt 20 eieren te verstoppen, maar eerst wil hij deze eieren nog een vrolijk kleurtje geven. Elk ei krijgt één kleur en daarvoor heeft hij 5 kommetjes met verf tot zijn beschikking: blauw, geel, paars, rood en zilver. Door elk ei met één van de vijf kleuren naar keuze te beschilderen, heeft hij uiteindelijk bijvoorbeeld 2 blauwe, 0 gele, 8 paarse, 4 rode en 6 zilveren eieren in zijn mandje liggen. Maar het resultaat zou net zo goed uit 3 blauwe, 2 gele, 5 paarse, 7 rode en 3 zilveren eieren kunnen bestaan. En zo kunnen we nóg wel een paar manieren bedenken hoe hij de 20 eieren zou kunnen beschilderen. Hoeveel van zulke eierkleuringen zijn er eigenlijk? Oftewel, op hoeveel manieren is het mogelijk 20 eieren te beschilderen als het ons er alleen om gaat hoeveel eieren er uiteindelijk van de verschillende kleuren zijn? We hebben twee manieren gezien, die we kunnen aanduiden met (2, 0, 8, 4, 6) en (3, 2, 5, 7, 3).

Voor het eerste ei zijn er 5 keuzes, voor het tweede ei ook, enzovoort. Nu zou je misschien denken dat er $5^{20}$ mogelijkheden zijn om de eieren te verven. Toch gaat hier iets mis. Een kleurenreeks als BBBGGPPPPPRRRRRRRZZZ heeft immers hetzelfde resultaat als BGBGBPPPPPZZZRRRRRRR: in beide gevallen hebben we uiteindelijk 3 blauwe, 2 gele, 5 paarse, 7 rode en 3 zilveren eieren. Het blijkt dat er maar liefst $\binom{20}{3,2,5,7,3} = 55.870.214.400$ van zulke kleurenreeksen zijn die allemaal leiden tot dit resultaat (3, 2, 5, 7, 3), zie eventueel het artikel 'Slim coderen en handig dubbel tellen' uit de vorige *Pythagoras*. De eierkleuring (3, 2, 5, 7, 3) is dus 55.870.214.399 keer teveel geteld!

Laten we het probleem eens op een andere manier bekijken. We leggen de eieren op een rij (00000000000000000000) en pakken vier messen (aangeduid met +). Die messen schuiven we willekeurig tussen de eieren; het maakt niet uit of we ze naast elkaar leggen of niet, of helemaal vooraan of helemaal achteraan. De volgorde waarin we dit doen, maakt ook niet uit. De situatie kan er dan na afloop bijvoorbeeld als volgt uit zien: 000+00+00000+0000000+000. We spreken nu af dat de paashaas alle eieren vóór het eerste mes blauw verft, de eieren tussen eerste en tweede mes geel, enzovoort. Op die manier correspondeert bovenstaande 0+-rij precies met de eierkleuring (3, 2, 5, 7, 3). En omgekeerd hoort bij bijvoorbeeld (0, 0, 10, 0, 10) de 0+-rij ++0000000000++0000000000.

Bij elke eierkleuring hoort nu precies één zo'n 0+-rijtje en andersom. Dus kunnen we net zo goed het aantal 0+-rijtjes gaan tellen. Nu is zo'n 0+-rijtje uiteindelijk niets anders dan een opsomming van 20 0-tekens en 4 +-tekens in willekeurige volgorde. Dat zijn in totaal 24 tekens waarvan we er 4 moeten uitkiezen als + (of juist 20 als 0). Op deze manier vinden we dat er $\binom{24}{4} = \binom{24}{20} = 10.626$ verschillende 0+-rijtjes zijn. Dus zijn er 10.626 manieren om de eieren te verven!

In wiskundige termen hebben we nu het volgende probleem opgelost: *Hoeveel vijftallen niet-negatieve gehele getallen* $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *voldoen aan de vergelijking* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$?

Ter afsluiting presenteren we een paar soortgelijke telproblemen. ■

**Opgave 1.** Hoeveel vijftallen *positieve* gehele getallen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ voldoen er aan
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$?

**Opgave 2.** Hoeveel viertallen positieve oneven getallen $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ voldoen er aan
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$?
(uit *Titu Andreescu en Zuming Feng*, 102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO Team)

**Opgave 3.** Hoeveel oplossingen $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (met de $x_i$ niet-negatief geheel) heeft
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 20$?

## ANTWOORDEN

**Opgave 1. Oplossing A:** Door over te gaan op $y_i = x_i - 1$, zie je in dat je in feite op zoek bent naar vijftallen niet-negatieve gehele getallen met som 15. Dat zijn er met de paaseierenmethode $\binom{19}{4} = 3.876$.
**Oplossing B** (variatie op paaseierenmethode): Bekijk weer de 20 eieren. Daartussen zitten 19 tussenruimtes, aangeduid met T: 0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0T0. Van die 19 T'tjes moeten er 4 een + worden; dat kan op $\binom{19}{4} = 3.876$ manieren.

**Opgave 2.** Door $x_i$ te schrijven als $x_i = 2y_i + 1$, zie je dat je in feite op zoek bent naar viertallen niet-negatieve gehele getallen met som 47. Dat zijn er met de paaseierenmethode $\binom{50}{3}$.

**Opgave 3. Oplossing A:** Je zou kunnen zeggen: dan moet dus ófwel $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ ($\binom{3}{3}$ oplossingen), ófwel $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ ($\binom{4}{3}$ oplossingen), ófwel $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ ($\binom{5}{3}$ oplossingen), etc. Dus het antwoord is (elke keer met de paaseierenmethode) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{23}{3}$.
**Oplossing B:** Je kunt ook een niet-negatieve gehele spookvariabele $x_5$ introduceren die $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ aanvult tot 20, dus $x_5 = 20 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$; dan hoort er bij elke oplossing precies een vijftal niet-negatieve gehele getallen met som 20. Dat zijn er met de paaseierenmethode $\binom{24}{4}$.
**Gevolg:** Met deze twee verschillende antwoorden hebben we meteen dit bewezen:

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \cdots + \binom{23}{3} = \binom{24}{4}.$$

Dit wordt wel de 'sok van Pascal' genoemd (maar je mag het net zo goed een hockeystick noemen): als je al deze binomiaalcoëfficiënten even omcirkelt in de driehoek van Pascal, snap je waarom het zo heet!