De Nederlandse Wiskunde Olympiade wordt in 2011 voor de vijftigste keer gehouden. De eerste editie van deze jaarlijkse wedstrijd was in 1962. Dit was meteen een succes: er deden maar liefst 3346 deelnemers van 284 scholen aan mee. In dit artikel kijken we welke opgaven de leerlingen 'uit grootmoeders tijd' voor hun kiezen kregen.

■ door Birgit van Dalen en Quintijn Puite

50 JAAR WISKUNDE OLYMPIADE

Al sinds het begin van de vorige eeuw werden er in de wereld wiskundewedstrijden voor scholieren gehouden. Met name in Oost-Europa waren ze er erg fanatiek in. Dat leverde niet alleen plezier op voor de deelnemers, maar het had ook als effect dat er steeds meer Oost-Europese wiskundigen doordrongen tot de wereldtop. Vanzelfsprekend wilden andere landen niet achterblijven, dus in steeds meer landen werden wiskundeolympiades georganiseerd.

In Nederland werden er sinds 1805 wel al wiskundige prijsvragen uitgeschreven door het Wiskundig Genootschap, maar het duurde tot 1962 voordat de eerste olympiade een feit was. Het laatste zetje werd gegeven door een nieuw wiskundetijdschrift, namelijk *Pythagoras*, dat voor het eerst uitkwam in 1961 en heel goed werd ontvangen onder scholieren. Dit blad en de olympiade zijn dus vanaf het begin nauw verbonden geweest. Aangemoedigd door dit succes werd besloten om de Nederlandse Wiskunde Olympiade op te richten, met als doel (we citeren letterlijk uit een artikel uit die tijd):

(a) de leerlingen tot wiskundestudie te animeren;
(b) jeugdige talenten tijdig te ontdekken;
(c) topprestaties te honoreren;
(d) de keuze van een wiskundig beroep onder leerlingen van goede aanleg te propageren;
(e) betrouwbare aanwijzingen te verzamelen voor een verantwoorde leerstofkeuze bij het v.h.m.o. (voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs), waarmee in het bijzonder de meer begaafde leerlingen zullen zijn gebaat.

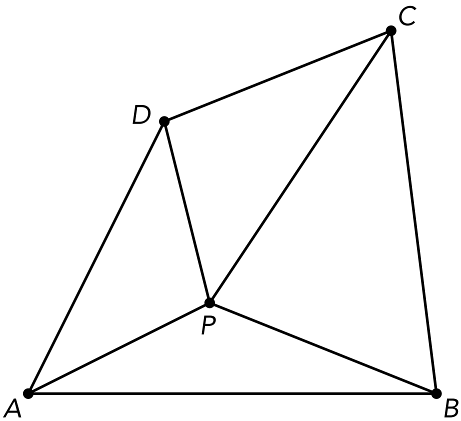
Op woensdag 2 mei 1962 was het zover en werd de eerste ronde van de allereerste Nederlandse Wiskunde Olympiade gehouden. In dit artikel bekijken we de eerste twee opgaven.

Opgave 1 van de eerste ronde 1962:
Gegeven is een vlakke vierhoek, waarvan elke hoek kleiner is dan een gestrekte hoek. Geef het punt aan, waarvoor de som van de afstanden tot de hoekpunten van de vierhoek zo klein mogelijk is. Bewijs dat Uw antwoord goed is.

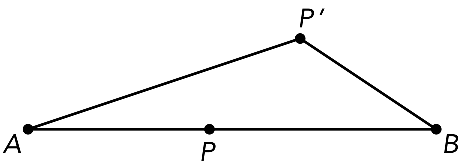
De opgave (hierboven in de oorspronkelijke formulering) gaat over een vierhoek waar geen deuken in zitten (elke hoek is kleiner dan 180°). Laten we de vier hoekpunten van deze vierhoek A, B, C en D noemen, zie figuur 1. Als we nu ergens een punt P in het vlak kiezen, dan kunnen we de afstand van P tot A meten; die schrijven we als $|PA|$. Zo ook kunnen we de afstanden van P tot de andere drie hoekpunten meten. De vraag is nu: voor welke P is $|PA| + |PB| + |PC| + |PD|$ minimaal?

Omdat niet direct duidelijk is wat het antwoord op deze vraag is, gaan we eerst maar eens iets makkelijkers bekijken. Wat als we nou alleen de afstand $|PA|$ zo klein mogelijk willen hebben? Hoe dichter P bij A ligt, hoe kleiner deze afstand wordt. Hij is natuurlijk minimaal als P bovenop A ligt.

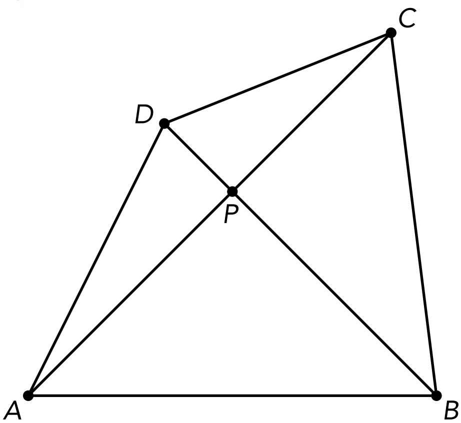
We maken het iets moeilijker: nu willen we $|PA| + |PB|$ zo klein mogelijk hebben. We kunnen P niet tegelijkertijd bovenop A en bovenop B kiezen,



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

dus de afstand kan deze keer niet 0 worden. Stel dat we een elastiekje spannen van A naar B langs punt P. De lengte van het elastiekje is precies $|PA| + |PB|$. Nu houden elastiekjes ervan om zo kort mogelijk te zijn; dan staat er zo min mogelijk spanning op. Wanneer is dat het geval bij dit elastiekje? Dat is natuurlijk als het elastiekje recht van A naar B loopt. Dus precies als P op het lijnstuk AB ligt.

Kunnen we dit ook wiskundig beargumenteren? Als P op het lijnstuk AB ligt, dan is $|PA| + |PB| = |AB|$. Voor een punt P' dat *niet* op lijnstuk AB ligt, geldt natuurlijk dat $|P'A| + |P'B| > |AB|$, zie figuur 2. Dus inderdaad geldt dat $|PA| + |PB|$ zo klein mogelijk is als P op het lijnstuk AB ligt.

We zouden nu graag willen dat niet alleen $|PA| + |PB|$, maar ook $|PC| + |PD|$ minimaal is. Dan is namelijk ook de som van die twee minimaal. Natuurlijk is $|PC| + |PD|$ minimaal als P op het lijnstuk CD ligt, maar helaas kan dat niet tegelijk met P op het lijnstuk AB, want deze lijnstukken hebben geen punt gemeenschappelijk. Deze strategie werkt dus niet.

We kunnen echter de som $|PA| + |PB| + |PC| + |PD|$ ook op een andere manier in tweeën splitsen, namelijk als $|PA| + |PC|$ en $|PB| + |PD|$. De eerste som is minimaal als P op het lijnstuk AC ligt, de tweede als P op het lijnstuk BD ligt. En dat kan wél tegelijkertijd! Namelijk precies als P het snijpunt van de diagonalen AC en BD van de vierhoek is, zie figuur 3.

Het antwoord op opgave 1 is dus: het snijpunt van de diagonalen, met als bewijs dat zowel $|PA| + |PC|$ als $|PB| + |PD|$ in dat geval minimaal zijn.

Opgave 2 van de eerste ronde 1962:
Los x en y op uit de vergelijking
$(\sin(x - y) + 1)(2\cos(2x - y) + 1) = 6$.

Dit ziet er vreselijk ingewikkeld uit. Om een beetje een idee te krijgen van wat er eigenlijk staat, gaan we maar eens wat waarden voor x en y invullen. De sinus en cosinus van veelvouden van 30° zijn makkelijk uit te rekenen, dus daar kiezen we onze x en y op uit. De laatste kolom in de volgende tabel geeft de waarde aan van $(\sin(x - y) + 1)(2\cos(2x - y) + 1)$ als we x en y invullen. We zoeken dus alle paren (x, y) waarvoor hier 6 uit komt.

x	y	$\sin(x - y)$	$\cos(2x - y)$	uitkomst
30°	60°	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
60°	30°	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
90°	60°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
90°	0°	1	−1	−2
0°	90°	−1	0	0

Het blijkt nog niet zo makkelijk te zijn om 6 in de rechterkolom te krijgen, of zelfs maar om daar in de buurt te komen. Hoe groot kunnen we de waarde in die kolom eigenlijk krijgen, als we hem zo groot mogelijk proberen te maken? We weten dat $\sin(x - y)$ nooit groter is dan 1, dus $\sin(x - y) + 1$ is hoogstens 2. En $\cos(2x - y)$ is ook nooit groter dan 1, dus $2\cos(2x - y) + 1$ is hoogstens $2 \cdot 1 + 1 = 3$. We zien dat zolang de twee factoren links in de vergelijking allebei positief zijn, de rechterkant nooit groter kan worden dan 6. En hij wordt zelfs alleen 6 indien $\sin(x - y) = 1$ en ook nog $\cos(2x - y) = 1$.

Het kan natuurlijk ook nog zo zijn dat we twee negatieve factoren links hebben, die met elkaar vermenigvuldigd 6 opleveren. Maar $\sin(x - y) \geq -1$, dus $\sin(x - y) + 1$ kan helemaal niet negatief zijn.

We hebben nu laten zien dat de vergelijking alleen waar is als $\sin(x - y) = 1$ en $\cos(2x - y) = 1$. Voor welke x en y geldt $\sin(x - y) = 1$? Dat is alleen als

$$x - y = 90° + k \cdot 360°,$$

met k geheel (want veelvouden van 360° maken niet uit). En wanneer is $\cos(2x - y) = 1$? Dat is precies als

$$2x - y = m \cdot 360°,$$

met m geheel. Nu moeten we hieruit nog x en y bepalen. We kunnen dit bijvoorbeeld doen door de twee gelijkheden van elkaar af te trekken:

$$\begin{aligned} x &= (2x - y) - (x - y) = \\ &m \cdot 360° - (90° + k \cdot 360°) = \\ &-90° + (m - k) \cdot 360°. \end{aligned}$$

En nu wordt y gelijk aan

$$\begin{aligned} y &= x - (x - y) = \\ &(-90° + (m - k) \cdot 360°) - (90° + k \cdot 360°) = \\ &-180° + (m - 2k) \cdot 360°. \end{aligned}$$

Welke getallen kunnen $m - k$ en $m - 2k$ eigenlijk zijn? Als we m vast kiezen en k alle gehele getallen laten aannemen, dan neemt $m - k$ ook alle gehele getallen aan. (Ga maar na: voor willekeurige gehele t kunnen we k zo kiezen dat $m - k = t$, namelijk $k = m - t$.) Dus we kunnen $m - k$ wel vervangen door t, waarbij t weer elk geheel getal kan zijn. Nu wordt $m - 2k$ gelijk aan $t - k$. Om precies dezelfde reden kan dit ook weer alle gehele getallen aannemen, welke t we ook kiezen. Dus in plaats van $m - 2k$ kunnen we ook wel r schrijven, met r een willekeurig geheel getal.

Omdat veelvouden van 360° toch niet uitmaken, kunnen we −180° ten slotte ook wel schrijven als 180° en −90° als 270°. Al met al vinden we als oplossingen:

$$\begin{cases} x = 270° + t \cdot 360°, \\ y = 180° + r \cdot 360°. \end{cases}$$

Dit is een heel 'rooster' aan oplossingen, met $(x, y) = (270°, 180°)$ als 'oorsprong' en steeds een nieuwe oplossing als we bij de x- of y-coördinaat (of bij allebei) een veelvoud van 360° optellen (of eraf halen).

We controleren nog even of we geen rekenfouten gemaakt hebben door $x = 270°$ en $y = 180°$ in te vullen. Dan krijgen we $\sin(x - y) = \sin(90°) = 1$ en $\cos(2x - y) = \cos(360°) = 1$, dus

$$(\sin(x - y) + 1)(2\cos(2x - y) + 1) = 6.$$

TOEN EN NU Deze eerste ronde van 1962 bestond uit negen opgaven. De deelnemers konden hiervoor bij elkaar 120 punten scoren. De gemiddelde score was echter slechts 17 en maar één deelnemer scoorde meer dan 100 punten. De precieze scores op de twee opgaven die we hierboven besproken hebben, zijn onbekend. Tegenwoordig is het met de computer een fluitje van een cent om allerlei statistieken te genereren, maar in 1962 werden de scores van alle 3346 deelnemers met de hand verwerkt. Ook het nakijken was een flinke klus, want zoals je al gezien hebt, bevatte de eerste ronde open vragen, waar een berekening of zelfs een bewijs gevraagd werd. Tegenwoordig komen open vragen pas bij de tweede ronde en is de eerste ronde een mix van meerkeuzevragen en opgaven waar een getal als antwoord moet worden gegeven (maar geen berekening).

Ook de aard van de opgaven is in de loop van de tijd wel wat veranderd. Een bewijsopgave zoals opgave 1 uit 1962 zou nu nooit meer in de eerste ronde terechtkomen. Ook voor de sinussen en cosinussen uit opgave 2 is geen plek meer in de huidige eerste rondes, omdat dat tot de bovenbouwstof behoort, terwijl de olympiade nu ook open staat voor onderbouwleerlingen. In 1962 daarentegen mochten alleen leerlingen uit de op één na hoogste klas van de middelbare school deelnemen.

Maar als we die verschillen tussen toen en nu even vergeten, zien we dat de opgaven van nu toch wel veel weg hebben van de opgaven uit 1962. Ook nu zijn de opgaven wat speelser dan de schoolwiskunde en ook nu heb je vaak een creatieve ingeving nodig om een opgave op te lossen. Die uitdaging en dat puzzelachtige karakter van de opgaven is wat de olympiade zo leuk maakt; daar is sinds 1962 niets aan veranderd! ■