Op 18 september bogen 131 scholieren zich in Eindhoven over vijf uitdagende opgaven die samen de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2009 vormden. Het was de laatste keer dat er een nationale tweede ronde plaatsvond: vanaf 2010 bestaat de Nederlandse Wiskunde Olympiade uit drie rondes en worden ruim 500 deelnemers aan de eerste ronde uitgenodigd voor een regionale tweede ronde op een universiteit in de buurt. Zij kunnen zich dan plaatsen voor de landelijke finale in september 2010.

■ door Quintijn Puite en Birgit van Dalen

EEN RIJ VOL KWADRATEN

We bekijken in dit artikel opgave 2 van de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Deze opgave gaat over een getallenrij die zo begint:

> 0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, ...

De getallen in deze rij noemen we de *termen* van de rij. Uitgaande van de beginterm $a_0 = 0$ wordt een nieuwe term in de rij steeds gemaakt door een bepaald getal op te tellen bij de vorige term. Dat getal dat opgeteld wordt, is de eerste twee keer 1, de volgende twee keer 2, de twee keer daarna 3, enzovoorts. We krijgen zo $a_1 = a_0 + 1 = 1$, $a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 2 = 4$, $a_4 = a_3 + 2 = 6$, $a_5 = a_4 + 3 = 9$, $a_6 = a_5 + 3 = 12$, ... We kunnen dit recept blijven volgen en zo een oneindig lange rij getallen maken. Van elke term in de rij kunnen we zeggen hoe hij gemaakt is uit zijn voorganger. We moeten daarvoor wel onderscheid maken tussen termen met een *oneven index* (die schrijven we als a_{2n-1}) en termen met een *even index* (die schrijven we als a_{2n}). In de berekening van de eerste paar termen van de rij wordt steeds een term met een even index gemaakt door de helft van de index op te tellen bij zijn voorganger. Dus bijvoorbeeld $a_2 = a_1 + 1$, $a_4 = a_3 + 2$ en $a_6 = a_5 + 3$. Dit blijft waar, ook voor termen verderop in de rij, omdat het getal dat we optellen steeds 1 groter wordt als je twee termen verder gaat in de rij. In het algemeen kunnen we nu schrijven dat $a_{2n} = a_{2n-1} + n$. De term met oneven index die direct voor a_{2n} zit, is gemaakt door hetzelfde getal op te tellen bij de term daar weer voor. Kortom, $a_{2n-1} = a_{2n-2} + n$. We kunnen nu de rij heel mooi wiskundig opschrijven:

> $a_0 = 0$ en voor alle gehele $n \geq 1$ geldt:
> $a_{2n-1} = a_{2n-2} + n$,
> $a_{2n} = a_{2n-1} + n$.

In de tweede ronde werd over deze getallenrij de volgende vraag gesteld:

> Vind alle gehele getallen $k \geq 0$ waarvoor de term a_k het kwadraat van een geheel getal is.

Laten we eerst maar eens een flink stuk van de rij uitschrijven: 0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, 64, 72, 81, 90, 100, ...

Hier zitten aardig wat kwadraten in! Het begint al met 0 (dat is 0^2) en daarna zien we 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 en 100. Het lijkt er wel op dat in ieder geval alle termen met een oneven index een kwadraat zijn: $a_1 = 1^2$, $a_3 = 2^2$, $a_5 = 3^2$, enzovoorts. Kunnen we dit vermoeden ook weer in een mooie formule uitdrukken? We schreven de termen met oneven index als a_{2n-1}. Voor $n = 1$ krijgen we dat de term gelijk is aan 1^2, voor $n = 2$ is hij 2^2 en voor $n = 3$ is hij 3^2. Hier zien we al een mooi patroon in, wat we gemakkelijk genoeg in een formule kunnen gieten:

> **Vermoeden:**
> $a_{2n-1} = n^2$ voor alle gehele $n \geq 1$.

We concentreren ons nu even op dit vermoeden over de termen met oneven index. Verderop gaan we nog kijken wat er met de termen met even index gebeurt.

HET VERMOEDEN BEWIJZEN Bij de tweede ronde moet je al je beweringen bewijzen. In dit geval is het niet voldoende dat ons vermoeden klopt voor de eerste twintig termen van de rij, die we uitgeschreven hebben, maar moeten we het voor algemene n bewijzen. Dat is echter niet zo moeilijk als het klinkt. Omdat we op dit moment even alleen geïnteresseerd zijn in de termen van de rij met oneven index, gaan we eerst eens proberen om een term met oneven index uit te drukken in de vorige term met een oneven index. We wisten al $a_{2n-1} = a_{2n-2} + n$. Bovendien kunnen we ook a_{2n-2} weer uitdrukken in zijn voorganger: $a_{2n-2} = a_{2n-3} + (n-1)$. Samen krijgen we dus $a_{2n-1} = a_{2n-3} + (n-1) + n = a_{2n-3} + 2n - 1$.

Kunnen we nu bijvoorbeeld ook a_{11} uitdrukken in a_1? Als we hierboven $n = 6$ nemen, krijgen we $a_{11} = a_9 + 11$. Als we $n = 5$ nemen, krijgen we $a_9 = a_7 + 9$. Door op deze manier verder te gaan, komen we uiteindelijk op

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11. \end{aligned}$$

Dit kunnen we ook wel in het algemeen:

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= a_{2n-3} + (2n-1) = \\ &= a_{2n-5} + (2n-3) + (2n-1) = \cdots = \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) + (2n-1). \end{aligned}$$

Nu moeten we alleen nog uitvinden wat de som van de oneven getallen van 1 tot en met $2n - 1$ is. Voor de som van een aantal getallen waar steeds hetzelfde verschil tussen zit (ook wel een *rekenkundige rij* genoemd) bestaat een formule: we moeten het gemiddelde van het eerste en laatste getal nemen en dat vermenigvuldigen met het aantal getallen dat we willen optellen. In ons geval: het aantal oneven getallen van 1 tot en met $2n - 1$ is precies n; en het gemiddelde van 1 en $2n - 1$ is $\frac{1+(2n-1)}{2} = n$. Dit betekent dat de som van de oneven getallen van 1 tot en met $2n - 1$ gelijk is aan $n \cdot n = n^2$. We concluderen dat ons vermoeden correct is: $a_{2n-1} = n^2$ voor alle gehele $n \geq 1$. In het kader op pagina 28 vind je nog een ander bewijs.

DE TERMEN MET EVEN INDEX We weten nu dat alle termen met oneven index een kwadraat zijn. We wisten ook dat a_0 een kwadraat is. Maar hoe zit het met de termen $a_2, a_4, a_6, \ldots$? Kunnen sommige van deze termen ook nog een kwadraat zijn? Het lijkt er niet op, want bij de eerste twintig termen is dat nooit het geval. Bovendien zijn er al zoveel kwadraten in gebruik door de termen met oneven index, dat er weinig overblijft voor de termen met even index. Om precies te zijn, er blijven helemaal *geen* kwadraten over.

Kunnen we dat ook wiskundig precies maken? We weten dat de termen van de rij steeds groter worden (je telt er immers steeds een positief getal bij op), oftewel $a_{2n-1} < a_{2n} < a_{2n+1}$ voor alle $n \geq 1$. En we weten dat $a_{2n-1} = n^2$ en $a_{2n+1} = (n+1)^2$. Dus geldt $n^2 < a_{2n} < (n+1)^2$. Maar n^2 en $(n+1)^2$ zijn opeenvolgende kwadraten, dus daar liggen natuurlijk geen andere kwadraten meer tussen. Dus a_{2n} kan nooit een kwadraat zijn voor $n \geq 1$.

We hebben nu de oplossing van de opgave gevonden. De indices k waarvoor a_k een kwadraat is, zijn $k = 0$ en alle oneven getallen k (en dat zijn ze ook echt allemaal).

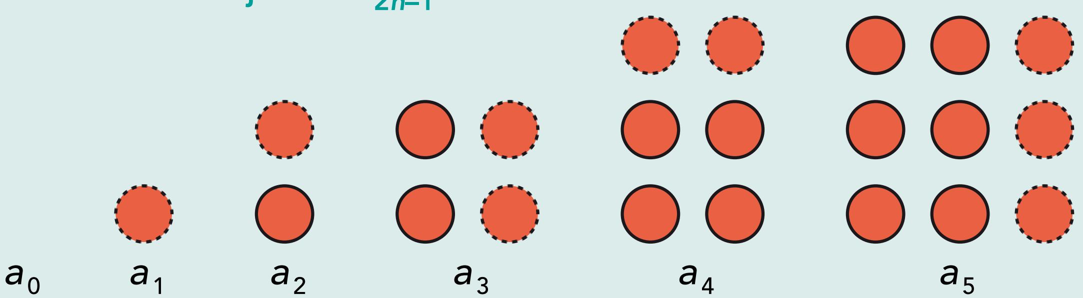
NOG EEN FORMULE We hebben hiervoor gekeken naar de termen in de rij met oneven index. Daar hebben we een formule voor gemaakt en met behulp van die formule hebben we de opgave opgelost. Dit hebben we gedaan zonder een formule voor de termen met even index te bedenken! Natuurlijk kunnen we daar wel een formule voor maken, heel makkelijk zelfs. We kennen immers de termen met oneven index al en we kunnen elke term uit zijn voorganger maken: $a_{2n} = a_{2n-1} + n = n^2 + n$. Deze formule $a_{2n} = n^2 + n$ kun je overigens ook direct bewijzen op dezelfde twee manieren als waarmee we de formule $a_{2n-1} = n^2$ bewezen hebben. Probeer het maar eens.

Kunnen we nu ook aan deze formule zien dat a_{2n} geen kwadraat is voor $n \geq 1$, zonder te gebruiken (zoals we hierboven deden) dat het tussen twee opeenvolgende kwadraten in zit? Ja, dat kan, als we gebruikmaken van *priemgetallen* (getallen die door precies twee getallen deelbaar zijn: 1 en zichzelf). Elk positief geheel getal kun je schrijven als product van priemgetallen. Dat heet de *priemfactorisatie* van een getal. Bijvoorbeeld: $10 = 2 \cdot 5$ en $24 = 2^3 \cdot 3$. In de priemfactorisatie van 24 komt de priemfactor 2 voor met exponent 3 en komt de priemfactor 3 voor met exponent 1 (maar die laten we in de schrijfwijze meestal weg, want $3^1 = 3$). De priemfactorisatie van een getal laat dus zien door welke priemgetallen dat getal deelbaar is en ook hoe vaak het door elk van die priemgetallen deelbaar is.

We kunnen aan de priemfactorisatie van een getal zien of het een kwadraat is of niet. Kwadraten zijn namelijk precies de getallen die allemaal *even* exponenten in hun priemfactorisatie hebben. Neem bijvoorbeeld 144. Dat kunnen we schrijven als $144 = 2^4 \cdot 3^2$. Je ziet dat de 144 een even aantal keer (namelijk 4 keer) deelbaar is door 2 en een even aantal keer (namelijk 2 keer) deelbaar door 3. Omdat 2 en 3 de enige priemgetallen zijn waar 144 deelbaar door is, kunnen we hieruit concluderen dat 144 een kwadraat is. Andersom geldt het ook: omdat bijvoorbeeld $48 = 2^4 \cdot 3$ een oneven aantal keer (namelijk 1 keer) deelbaar is door 3, is 48 geen kwadraat. Dat hij wel een even aantal keer door 2 deelbaar is, is niet genoeg: kwadraten zijn door *al* hun priemfactoren een even aantal keer deelbaar.

Nu gaan we bewijzen dat $n^2 + n$ nooit een kwadraat is voor $n \geq 1$. We halen eerst een factor n buiten haakjes: $n^2 + n = n(n + 1)$. We kijken nu naar de priemfactoren van n en $n + 1$. Als n bijvoorbeeld deelbaar is door 2, dan is $n + 1$ dat juist niet. En andersom: als $n + 1$ deelbaar is door 2, dan is n dat niet. Zo geldt dat voor elk priemgetal p waar $n(n + 1)$ deelbaar door is: ofwel n is deelbaar door p, ofwel $n + 1$ is deelbaar door p, maar niet allebei. Als n deelbaar is door p, dan is daarom de exponent bij p in de priemfactorisatie van n gelijk aan de ex-

Een ander bewijs voor $a_{2n-1} = n^2$



Figuur 1 De eerste zes termen van de rij weergegeven met fiches

Het vermoeden dat we op pagina 26 formuleerden, kunnen we ook anders bewijzen, namelijk met behulp van het neerleggen van *fiches*. We gaan, zoals in figuur 1, één voor één de termen uit de rij weergeven door een aantal fiches op tafel te leggen. We beginnen met $a_0 = 0$ fiches. Dat is dus een lege tafel. Vervolgens voegen we 1 fiche toe om a_1 te krijgen. Nu ligt er 1 fiche op tafel. Om a_2 te krijgen, moeten we weer 1 fiche toevoegen, dat we netjes boven het eerste fiche leggen. Voor a_3 moeten we 2 fiches toevoegen. Deze leggen we zo bij de twee fiches die er al lagen, dat de fiches samen een vierkant vormen. In de volgende stap voegen we weer 2 fiches toe, die we langs één zijde van het vierkant leggen. Nu ligt er een rechthoek van $a_4 = 6$ fiches. We maken er a_5 fiches van door 3 fiches toe te voegen. Deze kunnen we langs de lange zijde van de rechthoek leggen, zodat we opnieuw een vierkant krijgen.

Elke keer dat we met de fiches op tafel een vierkant kunnen leggen, betekent dat dat het aantal fiches op ponent bij p in de priemfactorisatie van $n(n+1)$.

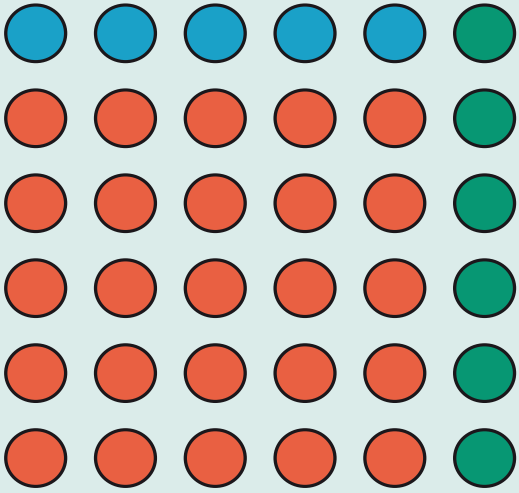
We kunnen dus in feite de priemfactorisatie van $n(n+1)$ in twee stukken hakken: sommige priemfactoren zitten in hun 'geheel' (dat wil zeggen: inclusief exponent) in de priemfactorisatie van n, en andere priemfactoren zitten juist helemaal in $n+1$. Neem bijvoorbeeld $n = 15$. Dan is $n(n+1) = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. De priemfactor 2 met exponent 4 zit in $n+1 = 16$; de andere twee priemfactoren vormen samen $n = 15$.

Stel nu dat $n(n+1)$ een kwadraat is. Dan zijn alle exponenten in de priemfactorisatie van $n(n+1)$ even. We hebben net gezien dat de priemfactoren inclusief exponenten verdeeld worden over n en $n+1$, dus ook de exponenten in de priemfactorisaties van n en $n+1$ zijn allemaal even. Dat betekent dat n en $n+1$ allebei zelf een kwadraat zijn. Dat zijn dus twee opeenvolgende getallen die allebei een kwadraat zijn. Maar dat komt bij positieve kwadraten nooit voor. We concluderen dat $a_{2n} = n(n+1)$ voor geen enkele gehele $n \geq 1$ een kwadraat is. Natuurlijk is $a_0 = 0$ wel een kwadraat.

We zijn nu op een andere manier opnieuw bij de oplossing van de opgave aangekomen. Even terugkijken: we hebben op twee verschillende manieren de formules $a_{2n-1} = n^2$ en $a_{2n} = n(n+1)$ bewezen. Vervolgens hebben we daar op twee verschillende manieren uit afgeleid welke termen van de rij kwadraten zijn. Je kunt deze opgave dus op minstens vier manieren oplossen! Lukt het jou om nog een andere oplossing te vinden? ■

tafel een kwadraat is. Ons vermoeden zegt dat bij term a_{2n-1} een vierkant van n bij n fiches op tafel ligt. Stel nu dat we dit al weten voor een zekere n. We willen nu laten zien dat we na twee keer fiches toevoegen een vierkant van $n+1$ bij $n+1$ kunnen leggen, want dan geldt $a_{2n+1} = (n+1)^2$. Als we zo voor elke n de stap van een $n \times n$ vierkant naar een $(n+1) \times (n+1)$ vierkant kunnen maken, dan kunnen we van een 1×1 vierkant naar een 2×2 vierkant, vanaf daar naar een 3×3 vierkant, enzovoorts. Deze bewijsmethode heet *volledige inductie*.

We beginnen dus met een vierkant van n bij n fiches. In figuur 2 hebben we bijvoorbeeld voor $n = 5$ een vierkant van 5 bij 5 rode fiches liggen. We gaan eerst maar eens naar a_{2n} fiches: we moeten daarvoor n extra fiches op tafel leggen, want $a_{2n} = a_{2n-1} + n$. Omdat we een vierkant van n bij n hadden, kunnen we de n nieuwe fiches mooi langs een zijde van het vierkant leggen (de blauwe fiches in figuur 2). Nu hebben we een rechthoek van n bij $n+1$. Omdat $a_{2n+1} = a_{2n} + (n+1)$, pakken we vervolgens $n+1$ fiches erbij. Deze leggen we langs de lange zijde van de rechthoek (de groene fiches in figuur 2) zodat er een vierkant van $n+1$ bij $n+1$ gevormd wordt. Er liggen nu a_{2n+1} fiches op tafel en dat zijn er blijkbaar precies $(n+1)^2$. Dit is wat we graag wilden! We hebben vanuit een vierkant van n bij n fiches in twee stappen een vierkant van $n+1$ bij $n+1$ fiches gemaakt.



Figuur 2 Van een vierkant van 5 bij 5 fiches in twee stappen naar een vierkant van 6 bij 6 fiches