In Cambridge (Verenigd Koninkrijk) waren in april scholieren uit zestien Europese en drie niet-Europese landen bij elkaar. Elk land mocht zijn vier grootste wiskundetalenten afvaardigen, onder één voorwaarde: het moesten allemaal meisjes zijn. Het was namelijk de eerste editie van de *European Girls' Mathematical Olympiad*. In dit artikel bekijken we opgave 6 van deze nieuwe wedstrijd.

■ door Birgit van Dalen

FACEBOOK

MET ONEINDIG VEEL GEBRUIKERS

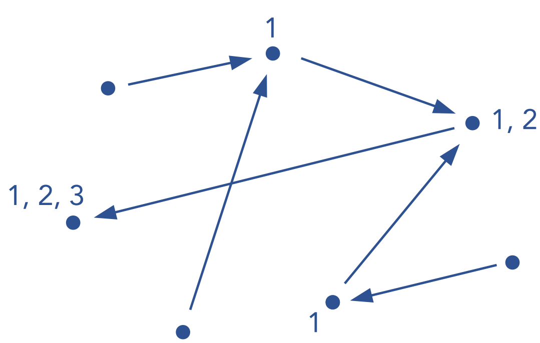
Eerst even dit: zo'n wedstrijd speciaal voor meisjes, is dat niet een beetje vreemd? Er is toch ook geen wiskundewedstrijd speciaal voor jongens? Inderdaad, maar bij de wiskundewedstrijden op hoog niveau zie je veel meer jongens dan meisjes. Zo is het idee ontstaan om meisjes een extra stimulans te geven om aan dit soort wedstrijden mee te doen.

In het Verenigd Koninkrijk is het plan gemaakt om een aparte internationale meisjesolympiade te organiseren: twee wedstrijddagen met pittige wiskundeopgaven en daarnaast veel sociale activiteiten.

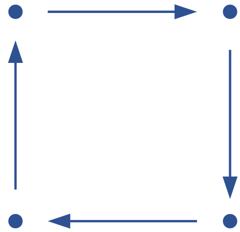
Ook Nederland heeft deelgenomen. Om de vier meisjes te selecteren, zijn er bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade extra meisjes uitgenodigd voor de finale, en na extra training was er in maart een selectietoets om uit te vechten wie er naar Cambridge mochten: Loes Bazuin, Carina Both, Michelle Sweering en Marieke van der Wegen.

SMOELENBOEK Eén van de opgaven die zij voor hun kiezen kregen, ging over de website *Smoelenboek*. Deze website lijkt erg op Facebook, maar bij Smoelenboek zijn oneindig veel gebruikers geregistreerd. Dat zal bij Facebook nooit lukken, maar in een wiskundeopgave kunnen zulke dingen gelukkig gewoon. Net als bij Facebook kunnen de gebruikers van Smoelenboek elkaars vrienden worden. Maar daarnaast moet elke gebruiker van Smoelenboek ook één van zijn vrienden benoemen tot zijn *beste vriend*. Iedereen heeft dus in elk geval één beste vriend en daarnaast nog een aantal vrienden die niet zijn beste vriend zijn.

Een gebruiker van Smoelenboek kan *vriendschapsgetallen* sparen. Hij heeft vriendschapsgetal 1 als hij benoemd is tot de beste vriend van een andere gebruiker. Hij heeft verder vriendschapsgetal 2 als hij benoemd is tot de beste vriend van een gebruiker die vriendschapsgetal 1 heeft. En hij heeft vriendschapsgetal 3 als hij benoemd is tot de beste vriend van een gebruiker die vriendschapsgetal 2 heeft. Enzovoorts. In figuur 1 zie je een aantal Smoelenboekgebruikers met hun vriendschapsgetallen. Van



Figuur 1 Zeven Smoelenboekgebruikers. De vermelde getallen zijn hun vriendschapsgetallen.



Figuur 2 Vier gebruikers die allemaal alle positieve gehele getallen als vriendschapsgetal hebben.

elke gebruiker wijst een pijl naar zijn beste vriend.

In figuur 2 zie je nog een voorbeeld. Omdat alle vier de gebruikers de beste vriend van een ander zijn, hebben ze allemaal vriendschapsgetal 1. Maar omdat ze alle vier vriendschapsgetal 1 hebben, hebben hun beste vrienden ook vriendschapsgetal 2. Dus ze hebben alle vier ook vriendschapsgetal 2. Maar dan natuurlijk ook vriendschapsgetal 3, en 4, en .... Elk van deze vier gebruikers heeft dus álle positieve gehele getallen (1, 2, 3, 4, 5, ...) als vriendschapsgetal, oneindig veel getallen dus. Zo'n gebruiker die alle positieve gehele getallen als vriendschapsgetal heeft, noemen we een *populaire* gebruiker.

Omdat er oneindig veel gebruikers van Smoelenboek zijn, hoeft zo'n populaire gebruiker niet in een cirkeltje van beste vrienden te zitten zoals in figuur 2. We kunnen ook oneindig veel gebruikers $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nemen. Als dan A_1 de beste vriend is van A_2, A_2 de beste vriend van A_3, A_3 de beste vriend van A_4, enzovoorts, dan is A_1 populair. Zie figuur 3. Wie weet zijn er nog wel meer manieren.

DE OPGAVEN Nu we een beetje gewend zijn aan de begrippen die bij Smoelenboek een rol spelen, kijken we wat er eigenlijk gevraagd werd in deze opgave. Dat zijn twee dingen:

Onderdeel a. Stel dat elke gebruiker maar eindig veel vrienden heeft. Laat zien dat een populaire gebruiker altijd de beste vriend is van een andere populaire gebruiker.

Onderdeel b. Stel dat gebruikers oneindig veel vrienden mogen hebben. Laat zien dat het dan mogelijk is dat een populaire gebruiker van geen enkele andere populaire gebruiker de beste vriend is.

Onderdeel a lijkt logisch: in allebei de manieren die we gevonden hadden om een populaire gebruiker te maken (het cirkeltje en de oneindig lange keten) klopt het. Maar hoe bewijzen we nou dat het *altijd* klopt? Stel maar eens dat het niet klopt; we gaan laten zien dat dat niet kan.

We voeren nu eerst een nieuwe term in: als persoon X persoon Y benoemd heeft tot zijn beste vriend, dan noemen we X een *fan* van Y. Er geldt dan dat persoon X vriendschapsgetal 1 heeft als hij een fan heeft, vriendschapsgetal 2 heeft als hij een fan heeft met vriendschapsgetal 1, enzovoorts. We moeten nu voor onderdeel a laten zien dat een populaire gebruiker met eindig veel vrienden (en dus ook eindig veel fans) een fan heeft die zelf ook populair is. En we nemen juist het omgekeerde aan: A is populair, maar geen van zijn fans is ook populair. Wat weten we dan? Persoon A heeft tussen al zijn vriendschapsgetallen ook vriendschapsgetal 10 zitten, dus één van zijn fans moet wel vriendschapsgetal 9 hebben. Verder heeft A vriendschapsgetal 100, dus één van zijn fans moet wel vriendschapsgetal 99 hebben. En zo ook moet A een fan hebben met vriendschapsgetal 3000, en eentje met vriendschapsgetal 1.000.000, enzovoorts.

Kan het misschien zo zijn dat één van de fans van A alle even vriendschapsgetallen (2, 4, 6, ...) heeft en een andere alle oneven (1, 3, 5, ...), zodat ze samen alles hebben? De fan die vriendschapsgetal 2 heeft, heeft zelf ook vriendschapsgetal 1, anders zou hij niet de beste vriend van iemand zijn en dus ook nooit vriendschapsgetal 2 hebben. En zo ook heeft iemand met vriendschapsgetal 4 ook vriendschapsgetal 3 (kun je bedenken waarom dat is?) en trouwens ook 2 en 1. In het algemeen heeft iemand met vriendschapsgetal m ook de vriendschapsgetallen $m-1, m-2, \ldots, 3, 2$ en 1.

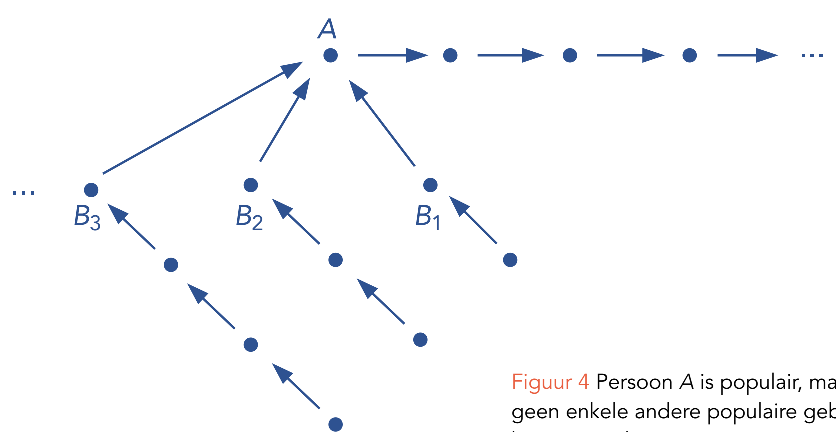
Figuur 3 Persoon A_1 is populair.

Er zijn dus eigenlijk maar twee mogelijkheden voor de vriendschapsgetallen van een gebruiker: hij heeft er eindig veel, namelijk 1 tot en met m voor een of andere positieve gehele m, of hij heeft er oneindig veel, namelijk alle positieve gehele getallen 1, 2, 3, 4, 5, ... In het laatste geval is deze gebruiker populair, in het eerste geval juist niet. Laten we nu weer even kijken naar de fans van A, waarvan we hadden aangenomen dat ze allemaal niet populair waren. Dan zitten ze dus allemaal in het eerste geval en hebben ze een *grootste* vriendschapsgetal m. Die m hoeft niet voor elke fan van A hetzelfde te zijn. Maar het zijn maar eindig veel fans, dus we kunnen al die getallen m wel even op een rijtje zetten en de grootste eruit kiezen. Laten we die M noemen. Dan is dus het grootste vriendschapsgetal dat voorkomt tussen de fans van A, gelijk aan M. Dan is automatisch het grootste vriendschapsgetal van A gelijk aan $M + 1$. Maar dat kan niet! Onze populaire persoon A moet namelijk ook vriendschapsgetal $M + 2$ hebben, en $M + 3$, enzovoorts. We concluderen dat het niet kan dat A alleen maar niet-populaire fans heeft, terwijl hij zelf populair is. Hij moet dus wel een fan hebben die populair is. We hebben nu onderdeel a opgelost.

Waarom werkt het bij **onderdeel b** anders, als A oneindig veel vrienden kan hebben? Waarom kan A dan ineens wel populair zijn zonder dat hij populaire fans heeft? Nog steeds moet elke niet-populaire fan van A een grootste vriendschapsgetal m hebben. Maar nu zijn er oneindig veel fans, dus we kunnen bijvoorbeeld een fan B_1 hebben met grootste vriendschapsgetal 1, een fan B_2 met grootste vriendschapsgetal 2, een fan B_3 met grootste vriendschapsgetal 3, enzovoorts. Omdat A oneindig veel fans kan hebben, kan dit oneindig lang doorgaan en heeft A dus zelf alle positieve gehele getallen als vriendschapsgetal, zodat hij zelf wel populair is.

Overigens moet A zelf ook nog wel een beste vriend hebben. Dat mag niet één van de gebruikers B_i zijn, want de beste vriend van A is automatisch zelf ook populair. Als we echter gewoon nog een oneindige keten van beste vrienden maken die begint bij A, dan is dat ook opgelost. Al met al krijgen we nu een situatie zoals in figuur 4. Hiermee hebben we dus ook onderdeel b opgelost.

BRONZEN MEDAILLE Van het Nederlandse team hadden Carina en Michelle de Smoelenboek-opgave grotendeels gekraakt. Michelle had ook nog zoveel punten bij andere opgaven gehaald dat ze één van de bronzen medailles wist binnen te slepen. Marieke en Loes hebben beiden een eervolle vermelding verdiend voor het helemaal correct oplossen van één van de andere opgaven. Alle opgaven en uitwerkingen zijn te vinden op de website www.egmo2012.org.uk. ■



Figuur 4 Persoon A is populair, maar is van geen enkele andere populaire gebruiker de beste vriend.