Deze maand vindt weer de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Vorig jaar deden er bijna 7500 leerlingen van 283 middelbare scholen mee. Dit jaar hopen we dat opnieuw zoveel leerlingen een gooi doen naar een plaats in de tweede ronde. Als opwarmer bespreken we in dit artikel de laatste opgave van de eerste ronde van vorig jaar. Hoewel deze het slechtst werd gemaakt, is hij minder ondoorgrondelijk dan hij op het eerste gezicht lijkt.

■ door Jaap de Jonge

OP ZOEK NAAR 2013

Wat de opgaven van de Wiskunde Olympiade zo aantrekkelijk maakt, is dat ze altijd weer anders zijn. Heb je net met een slimme aanpak een opgave opgelost, bij de volgende sta je weer met lege handen en is het de vraag hoe je de oplossing nú weer vindt. Voor de liefhebber zijn de mooiste opgaven eigenlijk diegene waarvoor je (bijna) niets hebt aan alles wat je daarvoor al gedaan hebt. Zo'n opgave was de laatste in de eerste ronde van 2013.

Opgave B4 (NWO, eerste ronde 2013). We schrijven de getallen 1 tot en met 30000 achter elkaar op zodat een lange rij cijfers ontstaat: 123456789101112......30000. Hoe vaak komt 2013 in deze rij voor?

Deze opgave is onder meer zo mooi omdat 'met lege handen staan' in wiskundeolympiadeland eigenlijk niet bestaat. Misschien heb je op het eerste gezicht geen idee hoe je een probleem moet aanpakken, maar je kunt altijd proberen het beter te leren kennen en wellicht beter te begrijpen.

Veel mooie opgaven laten je even schrikken en duizelen van de schijnbaar gigantische hoeveelheid mogelijkheden die er voor de oplossing bestaan of van de schijnbaar enorme hoeveelheid mogelijkheden waarbinnen je het antwoord moet zoeken. De getallen 1 tot en met 30000 achter elkaar gezet, hoeveel cijfers achter elkaar levert dat wel niet op? Flink wat, natuurlijk, maar in elk geval niet zo moeilijk uit te rekenen. Want de 9 getallen 1 tot en met 9 bestaan elk uit 1 cijfer, de 90 getallen van 10 tot en met 99 elk uit 2 cijfers, de 900 getallen van 100 tot en met 999 elk uit 3 cijfers, de 9000 getallen van 1000 tot en met 9999 elk uit 4 cijfers, en de 20001 getallen van 10000 tot en met 30000 elk uit 5 cijfers, wat het totaal brengt op $1 \times 9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 + 4 \times 9000 + 5 \times 20001 = 138894$ cijfers op een rij. Dat is best veel, maar in elk geval niet oneindig. Veel minder dan een miljoen zelfs, merken we optimistisch op, dus domweg de hele rij langslopen zou altijd nog kunnen. Met vier cijfers per seconde zouden we binnen tien uur klaar zijn, moe en onvoldaan om onze domme inzet van 'brute force' – het tegendeel van slim denkwerk.

GERICHT ZOEKEN De vraag is of we gericht naar 2013 kunnen zoeken, zodat we het overgrote deel van de cijfers in die lange rij kunnen overslaan. Tsja, 2013 komt als getal meteen al voor na 2012, en daarna natuurlijk nog in 12013 (na 12012) en in 22013 (na 22012). Het grote probleem zit hem in de situaties dat een eerste deel van 2013 in een eerste getal voorkomt, en het resterende deel in het daaropvolgende getal, zoals bij het paar 1320-1321. Hoe vaak zou zoiets voorkomen? Dat kunnen we uitvinden door naar vergelijkbare splitsingen van 2013 te kijken. Maar… dan zijn we er ook meteen; 'het grote probleem' ontmaskeren we als de aanpak voor de oplossing!

De cijferreeks 2013 kan voorkomen als onderdeel van één getal (zoals 2013 zelf of 20131 of

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

12013) of kan zijn samengesteld uit delen van opeenvolgende getallen (zoals de tweede helft van 1320 met de eerste helft van 1321). Als samenstelling van vier opeenvolgende getallen zal 2013 niet voorkomen, domweg omdat de cijfers 2, 0, 1 en 3 niet in die volgorde voorkomen. Zou een samenstelling uit drie verschillende getallen wel kunnen? Bekijken we niet 2013 maar, bijvoorbeeld, 9101, dan lukt het met de reeks 9-10-11. Maar in het geval van 2013 gaat dat niet. Van de drie getallen zou het middelste 0 of 1 moeten zijn of het niet-toegestane ‘getal’ 01. Het is onmiddellijk duidelijk dat die situatie niet kan optreden.

Dat betekent dat 2013 alleen maar voorkomt als onderdeel van één getal of als samenstelling van het eind van een getal en het begin van het volgende getal. Die situaties kunnen we eenvoudig op volgorde zetten:

- 2013 is het begin van een getal in de rij. Dit levert meteen al elf gevallen: 2013, 20130, 20131, …, 20139.
- 2013 bestaat uit een 2 waarop het ene getal eindigt en 013 waarmee het volgende getal begint. Maar behalve 0 zelf beginnen getallen normaal gesproken niet met een 0, dus dit is geen reële situatie.
- 2013 bestaat uit een 20 waarop het ene getal eindigt en 13 waarmee het volgende getal begint. Dat is interessant: even nadenken doet je beseffen dat daarmee het eerste getal zelf ook met 13 moet beginnen! Die situatie komt ook elf keer voor: 1320-1321 en dan nog 13020-13021, 13120-13121, …, 13920-13921.
- 2013 bestaat uit een 201 waarop het ene getal eindigt en 3 waarmee het volgende getal begint. Merk op dat vijfcijferige getallen daarvoor niet in aanmerking komen, omdat het enige vijfcijferige getal dat met een 3 begint, 30000 is. We hoeven dus alleen naar viercijferige getallen te kijken, en concluderen dat alleen 3201-3202 de juiste combinatie geeft.
- 2013 is het eind van een getal in de rij, waarbij we het getal 2013 zelf uitsluiten, omdat we dat al bij de eerste situatie hebben geteld. Dit levert twee extra gevallen op: 12013 en 22013.

Tellen we alle mogelijkheden op, dan vinden we 25 keer het getal 2013 in de gegeven rij. Kwestie van netjes ordenen en goed tellen, dat is alles! Maar eerlijk is eerlijk: dat is makkelijk gezegd, nu we het antwoord hebben. Zelf had ik de opgave haastig gemaakt en was ik niet in de buurt van 25 mogelijkheden gekomen! Het is dan ook niet voor niets een B-opgave: met goed denkwerk prima te doen, maar te moeilijk om eventjes uit je mouw te schudden. Maar ja, waarom zou je aan opgaven willen werken waarop je het antwoord onmiddellijk weet?

DOE MEE! Ook in de eerste ronde van 2014 zullen weer opgaven voorkomen die er afschrikwekkend uitzien. Denk dan aan 2013! Lees goed, lees de opgave nog eens, laat op je inwerken wat het probleem van de opgave nou werkelijk is. Grote kans dat je dan voor je het weet al aan de oplossing bent begonnen! ■