IMO2013

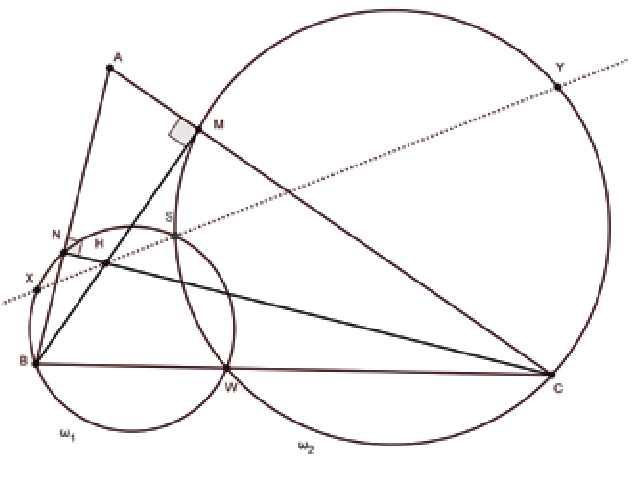
Jeroen Huijben

OPGAVE 4

Afgelopen zomer vond van 21 t/m 28 juli de 54e Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats in Santa Marta, Colombia. In dit artikel bespreekt Jeroen Huijben, die bij deze wedstrijd een zilveren medaille binnensleepte, één van de opgaven. Wellicht biedt dit u inspiratie voor een les voor vwo wiskunde B.

Het Nederlandse team heeft in Colombia een mooie prestatie neergezet: voor het vierde jaar op rij wisten vijf van de zes teamleden een medaille in de wacht te slepen. Dit komt onder andere door het mooie resultaat op de twee moeilijkste opgaven van de wedstrijd: ik loste zelf opgave 3 volledig op en Jeroen Winkel haalde drie van de zeven punten op opgave 6. Maar belangrijker is misschien nog wel dat het hele team opgave 4 volledig heeft opgelost! Dat is de volgende opgave:

Zij ΔABC een scherphoekige driehoek met hoogtepunt H. Zij W een punt verschillend van B en C op het lijnstuk BC. Laat M en N de voetpunten zijn van de hoogtelijnen vanuit respectievelijk B en C. Zij ω_1 de omgeschreven cirkel van ΔBWN en zij X het punt op ω_1 zodanig dat WX een middellijn van ω_1 is. Analoog, zij ω_2 de omgeschreven cirkel van ΔCWM en zij Y het punt op ω_2 zodanig dat WY een middellijn van ω_2 is, zie figuur. Bewijs dat X, Y en H collineair zijn.



In het plaatje van deze opgave vallen mij twee dingen op. Ten eerste weten we nog weinig over de punten X en Y, dus we moeten daar nog extra informatie over vinden. Ten tweede zien we dat het tweede snijpunt van de cirkels ω_1 en ω_2 op dezelfde lijn lijkt te liggen als waar X, Y en H op moeten liggen. Als eerste stap kunnen we dus proberen om te bewijzen dat dit snijpunt op de lijn XY ligt. Daarvoor definiëren we het tweede snijpunt van ω_1 en ω_2 als S. Nu kunnen we iets zeggen over de hoek $\angle WSX$. Er is namelijk gegeven dat WX een middellijn van ω_1 is, dus volgens de stelling van Thales geldt $\angle WSX = 90°$. Analoog, omdat WY een middellijn van ω_2 is, volgt met Thales dat $\angle WSY = 90°$. Dus $\angle XSY = \angle XSW + \angle YSW = 90° + 90° = 180°$ en we vinden dat $\angle XSY$ een gestrekte hoek is. De punten X, S en Y liggen dus inderdaad op een lijn. Als H nu toevallig samenvalt met S, zijn we dus direct al klaar. Maar als H niet samenvalt met S, moeten we nog even langer nadenken.

We hebben wel al iets meer grip op de opgave: ons eerste vermoeden is bewezen en we hebben iets nieuws ontdekt over de punten X en Y. Dat betekent dat we meer mogelijkheden hebben om het gevraagde te gaan bewijzen. Zo kunnen we proberen om te bewijzen dat X, H en S op een lijn liggen. Als dat geldt, liggen namelijk H en Y beide op de lijn XS, dus dan zijn X, Y en H collineair. We kunnen proberen dit te bewijzen door weer te kijken naar de hoeken $\angle WSX$ en $\angle WSH$. Eén van die hoeken weten we al, namelijk $\angle WSX = 90°$. Als we dus kunnen bewijzen dat $\angle WSH = 90°$, dan liggen X, S en H op een lijn. Het is echter nog niet meteen duidelijk hoe we daarbij uitkomen, dus gaan we weer naar het plaatje kijken.

Bij een meetkundeopgave is het vaak belangrijk om koordenvierhoeken te vinden. Als we die bij deze opgave gaan zoeken, springt er één direct in het oog: omdat $\angle AMH = 90°$ en $\angle ANH = 90°$, liggen M en N op de cirkel met middellijn AH (Thales). Dus $AMHN$ is een koordenvierhoek. Als we iets beter kijken, zien we ook dat M en N op de cirkel met middellijn BC liggen, dus ook $BNMC$ is een koordenvierhoek. Als we deze cirkels netjes tekenen, lijkt het of ook S op de omgeschreven cirkel van koordenvierhoek $AMHN$ ligt. Dat kunnen we bewijzen.

Omdat $WCMS$ een koordenvierhoek is, geldt er volgens de koordenvierhoekstelling dat $\angle SMC + \angle SWC = 180°$. En analoog, omdat $WBNS$ een koordenvierhoek is, geldt $\angle SNB + \angle SWB = 180°$. Samen met enkele gestrekte hoeken vinden we dat $\angle SMA = 180° - \angle SMC = \angle SWC = 180° - \angle SWB = \angle SNB = 180° - \angle SNA$. Dat betekent dat $\angle SMA + \angle SNA = 180°$, dus volgens de koordenvierhoekstelling geldt dat AMSN een koordenvierhoek is. (Voor de liefhebber, dit was ook een direct gevolg van de stelling van Miguel.) Nu liggen de vijf punten A, M, S, H en N allemaal op één cirkel en AH is een middellijn van die cirkel. Daaruit volgt dat $\angle ASH = 90°$. Dat is al bijna de hoek die we nodig hebben om de opgave op te lossen: daarvoor wilden we namelijk $\angle WSH = 90°$.

Om de oplossing af te maken, gaan we nog laten zien dat A, S en W op een lijn liggen. Voor degenen die de machtslijnenstelling kennen, volgt dit direct door de machtslijnen te bekijken van de omgeschreven cirkels van $WBNS$, $WCMS$ en $BNMC$. Maar ook zonder die stelling is het eenvoudig aan te tonen: volgens de constante-hoekstelling in koordenvierhoek $AMSN$ geldt $\angle ASM = \angle ANM = 180° - \angle BNM$. De koordenvierhoekstelling in $BNMC$ geeft $180° - \angle BNM = \angle BCM = \angle WCM$ en volgens de koordenvierhoekstelling in $WCMS$ is dat weer gelijk aan $180° - \angle WSM$. We vinden dus dat $\angle ASM = 180° - \angle WSM$, dus $\angle ASM + \angle WSM$ is een gestrekte hoek en dus liggen A, S en W op een lijn. Daaruit volgt dat $\angle WSH = 180° - \angle ASH = 90°$ en dat wilden we laten zien.

We hebben het verhaal nu rondgepraat door steeds kleine stapjes te zetten. Het is alleen nog geen ‘chronologisch’ verhaal. Dat zou ongeveer deze vorm hebben: we merken eerst de koordenvierhoeken $AMHN$ en $BNMC$ op en de rechte hoeken die uit de stelling van Thales volgen, daarna bewijzen we dat $AMSN$ een koordenvierhoek is en daaruit dat A, S, W op één lijn liggen, en als laatste laten we zien dat X, H, S op één lijn liggen en analoog dat Y, H, S op één lijn liggen; daaruit volgt dat X, H, Y op één lijn liggen. Hierin is één van onze eerste waarnemingen, dat S op XY ligt, niet eens meer nodig!

Als je naar deze oplossing kijkt, dan zie je dat er eigenlijk steeds een klein stapje wordt gezet of een klein vermoeden bewezen en dat leidt uiteindelijk tot de oplossing. Afzonderlijk zijn dit allemaal geen moeilijke stappen, maar voor de oplossing moet je er toch maar net op komen. Nu hebben we steeds precies de goede stapjes gezet, maar bij een wedstrijd zoals de IMO is dat meestal niet het geval. De meesten van het Nederlandse team hebben dan ook andere oplossingen bedacht dan die hier gepresenteerd is. Bekijken we bijvoorbeeld de afstanden van de punten X, H, Y tot BC, dan kunnen we de verhoudingen daartussen uitdrukken in lengtes die op lijnstuk BC liggen. Zo is B de loodrechte projectie van X en C die van Y, en daar kunnen we ook nog de loodrechte projectie van H en het snijpunt van XY en BC bij betrekken (als dat bestaat). Met deze heel andere insteek krijg je ook een oplossing. Ik wil nu ook nog een andere oplossing bespreken die gebruikmaakt van een zogenaamde draaivermenigvuldiging.

Voor een draaivermenigvuldiging moeten we een punt O in het vlak (de oorsprong), een hoek $0 \leq \theta \leq 360°$ en een reëel getal $f > 0$ kiezen (factor). Een draaivermenigvuldiging is dan een functie van het vlak naar het vlak, waarbij het beeld van een punt P als volgt wordt bepaald: roteer P om O over een hoek θ, dat geeft P'; en ‘vermenigvuldig’ P' vervolgens ten opzichte van O met een factor f, dit geeft het beeld P''. Deze vermenigvuldiging is vergelijkbaar met scalaire vermenigvuldiging bij vectoren: $OP'' = f\,OP'$. Met deze definitie kunnen we ook het beeld van een figuur bepalen en dit beeld is gelijkvormig met het origineel, dit is een belangrijke eigenschap. Een andere belangrijke eigenschap is dat de hoek tussen een lijn en het beeld van die lijn gelijk is aan θ.

Nu beginnen we echt met de tweede oplossing: we merken eerst weer de koordenvierhoeken $AMHN$ en $BNMC$ en de rechte hoeken door Thales op. Nu laten we zien dat driehoeken XNW en HNA gelijkvormig zijn. Er geldt dat $\angle XNW = 90° = \angle HNA$, al één gelijke hoek. Ook geldt $\angle NXW = \angle NBW$ (constante-hoekstelling), $\angle NBW = \angle NBC = 180° - \angle NMC$ (koordenvierhoekstelling), $180° - \angle NMC = \angle NMA = \angle NHA$ (constante-hoekstelling). Dus $\angle NXW = \angle NHA$, dus driehoek XNW en driehoek HNA hebben twee gelijke hoeken en zijn daarmee gelijkvormig.

Nu bekijken we de draaivermenigvuldiging met oorsprong N, hoek 90° en factor $\frac{|NW|}{|NX|}$. Deze functie stuurt X naar W (ga dit na). Vanwege de zojuist aangetoonde gelijkvormigheid geldt $\frac{|NW|}{|NX|} = \frac{|NA|}{|NH|}$, en we zien nu ook dat H naar A gestuurd wordt. De lijn XH wordt dus naar de lijn WA gestuurd en omdat de draaihoek 90° is, is de hoek tussen XH en WA ook 90°. Analoog kunnen we laten zien dat YH en WA een hoek van 90° maken. Maar nu zien we dat XH en YH beiden loodrecht op WA staan. XH en YH zijn dus parallel en beide lijnen gaan door het punt H. Dat betekent dat XH en YH samenvallen en dus dat X, H, Y op één lijn liggen. Met een slim trucje wordt de oplossing ineens een stuk korter, maar dat wil niet zeggen dat je de opgave op die manier ook sneller oplost. Het bedenken van zo’n slim trucje vergt tijd, maar het loont vaak wel om ernaar te zoeken. De eerste oplossing vind je door hard werken en steeds kleine stapjes te zetten, maar dat werkt niet altijd. Vaak is een slimme, creatieve stap nodig om de opgave op te lossen en een elegante oplossing te vinden.

Over de auteur

Jeroen Huijben heeft drie jaar meegedaan aan de Internationale Wiskunde Olympiade. In 2011 behaalde hij brons, in 2012 goud (de derde gouden medaille in de historie van Nederland op de IMO) en in 2013 zilver. Hij studeert nu wiskunde en scheikunde aan de Universiteit Utrecht. E-mailadres: *jeroentjehuijben@hotmail.com*