De eerste ronde van de Wiskunde Olympiade staat weer voor de deur; eind januari zal deze weer plaatsvinden op alle aangemelde scholen. Wat voor opgaven krijg je daar voor je kiezen? En hoe pak je zo'n opgave eigenlijk aan? Eén strategie is – hoe raar het ook klinkt – om gewoon maar eens domweg wat te proberen.

■ door Birgit van Dalen en Quintijn Puite

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

DOMWEG PROBEREN

In 2014 zat de volgende opgave bij de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade:

Een tuin met een vijver (het zwarte vakje) zal betegeld worden met zeshoekige tegels, zoals in figuur 1. We hebben drie kleuren tegels: rood, groen en blauw. Het is niet toegestaan om twee tegels van dezelfde kleur tegen elkaar aan te leggen. Op hoeveel manieren kunnen we de tuin betegelen?

De tuin bestaat uit 21 tegels en elke tegel is rood, groen of blauw, dus er zijn $3 \times 3 \times \cdots \times 3 = 3^{21}$ betegelingen mogelijk, althans, als we gemakshalve die eis even vergeten dat het niet toegestaan is om twee tegels van dezelfde kleur tegen elkaar aan te leggen. 'Even' controleren welke betegelingen er dan daadwerkelijk voldoen, is er helaas niet bij, want dit gaat om meer dan 10 miljard mogelijkheden... Dus ga je proberen iets heel slims te bedenken, je staart nog eens naar het plaatje, je denkt nog eens na. Maar je komt geen steek verder. Wat nu? De gouden tip in dit geval lijkt te flauw om waar te zijn: pak je kleurpotloden en ga maar aan de slag met kleuren!

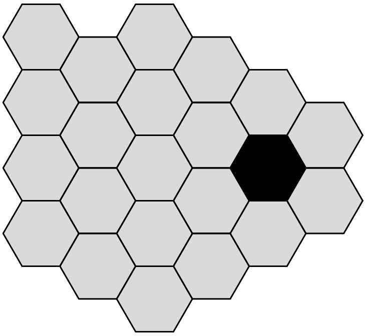
ZOMAAR EEN KLEURING Vergeet dus even de uiteindelijke vraag (Op hoeveel manieren...?) en probeer gewoon eens de tegels te kleuren volgens de voorgeschreven eis. Kleur bijvoorbeeld de tegel linksboven rood (tegel 1 in figuur 2). Dan hebben we voor tegel 2 direct daaronder de keuze uit groen en blauw. We kiezen groen. Nu we deze twee tegels gekleurd hebben, is het even afgelopen met de keuzevrijheid: er blijft voor tegel 3 maar één kleur over: blauw. En tegel 4, die aan tegel 2 en 3 grenst, moet dan wel rood worden. Waardoor vervolgens ook de kleur van tegel 5 (groen) en die van tegel 6 (blauw) vastligt. Zo kunnen we één voor één de kleur van steeds weer een nieuwe tegel afleiden, waarmee we uiteindelijk de tegelvloer van figuur 3 vinden.

We moeten nog twee tegels kleuren, tegel A en tegel B. Tegel A grenst aan een groene, dus die moet rood of blauw zijn. En tegel B grenst juist aan een rode, dus die moet blauw of groen zijn. Er valt eindelijk weer wat te kiezen; we maken ons plaatje af door voor A rood te kiezen en voor B blauw (zie figuur 4). Hiermee hebben we de tuin op een goede manier betegeld, want ook tegel A en B hebben nu een verschillende kleur.

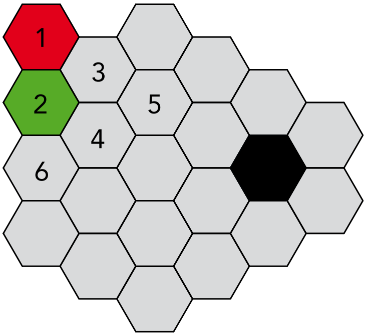
DE OORSPRONKELIJKE VRAAG Tijd om eens de eigenlijke vraag erbij te pakken: op hoeveel manieren kunnen we deze betegeling eigenlijk kiezen? Toen we eenmaal tegel 1 en 2 gekozen hadden, lagen de meeste tegels vast. Alleen voor A en B was er nog keuze: voor A konden we rood of blauw kiezen, en voor B juist blauw of groen. Dat levert in eerste instantie de $2 \times 2 = 4$ opties die in de figuren 5a tot en met 5d zijn aangegeven.

Bij de derde optie (figuur 5c) grenzen echter twee blauwe tegels aan elkaar, dus deze optie vervalt. De andere opties voldoen wel, dus al met al komen we op drie mogelijke betegelingen, gegeven dat tegel 1 rood is en tegel 2 groen. Maar we hadden natuurlijk ook tegel 1 en 2 anders kunnen kiezen. Wat als we tegel 1 groen zouden kiezen en tegel 2 juist blauw? Dan verloopt de rest van de kleuring eigenlijk hetzelfde als hierboven, alleen moet je overal even rood vervangen door groen, groen door blauw en blauw door rood.

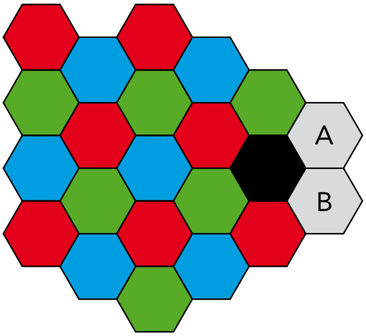
We kunnen de tegels van de tuin dus weer helemaal inkleuren tot aan de tegels A en B, waarvoor er weer drie mogelijkheden zijn. We zien dat er dus bij elke keuze van tegel 1 en 2 drie mogelijkheden zijn om A en B te kiezen. Resteert de vraag: hoeveel keuzes voor tegel 1 en 2 zijn er in totaal? Tegel 1 kan rood, blauw of groen zijn. En als die gekozen is, zijn er voor tegel 2 nog twee opties over. Dat zijn $3 \times 2 = 6$ mogelijkheden. En omdat er voor elk van deze mogelijkheden drie mogelijkheden zijn om A en B te kiezen, levert dit in totaal $6 \times 3 = 18$ betegelingen; klaar!



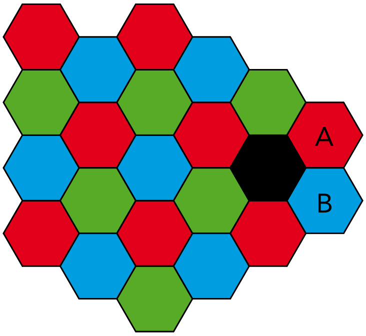
Figuur 1



Figuur 2



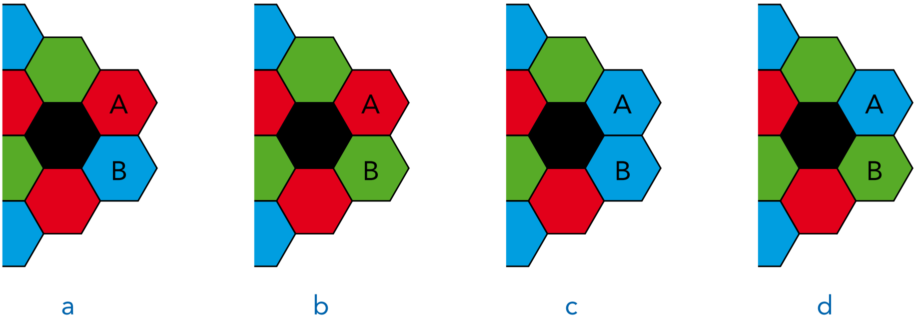
Figuur 3



Figuur 4

DURF TE PROBEREN Door gewoon maar eens te gaan kleuren, kregen we het probleem in de vingers. We zagen dat er helemaal niet zoveel vrijheid is om de kleuring te kiezen; op de tegels 1, 2, A en B na valt er niets te kiezen. Daardoor ging het probleem over in: op hoeveel manieren kunnen we tegels 1 en 2 kiezen? En als alles vastligt, hoe kunnen we dan tegel A en B kiezen? Dat hadden we nooit verzonnen, als we niet gewoon eens waren begonnen met kleuren!

Dit is maar één van de strategieën die van pas kunnen komen bij het maken van olympiadeopgaven. Deze en negen andere strategieën staan beschreven in het boek *Successtrategieën voor de Wiskunde Olympiade*. Vraag je docent voor meer informatie of kijk op www.wiskundeolympiade.nl, onder Publicaties. Elke school die in 2014 deelnam aan de eerste ronde van de Wiskunde Olympiade heeft een aantal van deze boeken ontvangen. ■



Figuur 5